RENATI DES CARTES
PRINCIPIA
MATHESEOS
UNIVERSALIS,
SEU
INTRODUCTIO
AD
GEOMETRIÆ METHODUM
Conscripta
Ab ER. BARTHOLINO, CASP. FIL.

ACCEDUNT HUIC QUARTÆ EDITIONI NOTÆ QUÆDAM & animadversiones tumultuariæ in universum Opus.

Cum Gratia & Privilegio Sac. Cæs. Majest.



FRANCOFURTI AD MOENUM,
Sumptibus FRIDERICI KNOCHII, Bibliop.

Anno M DC XCV.

LECTORI S.

CUM omnes ſapientes audire velint, & nihil tam temerarium tamque indignum ſapientis gravitate atque conſtantia ſit, quàm aut falſum ſentire, aut quod non ſatis exploratum ſit, ſine ulla dubitatione defendere: neſcio quo fato fiat, quòd non operam dent ejusmodi ſtudiorum viam ingredi, quâ mens adſveſcat verum à falſis & dubiis diſtingvere. Quandoquidem enim à teneris adſveſcere multum eſt, egregiè ſibi conſulerent, ſi ad Matheſin excolendam ab ineunte ætate animum appellerent. Mathematicas autem diſciplinas hanc præ aliis habere prærogativam, vix dubitari poteſt, modò conſideretur, quidquid in iis concluditur & determinatur, id omne ex præmiſſis neceſſitate quadam ſequi, vel verum, vel dubium, vel falſum, prout præmiſſæ variis modis ſeſe habuerint: Adeò ut, & ſi non aliis uſibus inſerviret Matheſis, tamen vel hoc nomine, ad ſui cognitionem trahere deberet etiam eos, quibus nullum aliud ex ea ſperaretur emolumentum. Quod cum abundè obſervatum & uſu comprobatum ſit à Veteribus, quos plerique noſtra ætate ita ſuſpiciunt & venerantur, ut majus quoddam animo complexi, plus multo etiam vidiſſe videantur, quàm

quantum nostrorum ingeniorum acies intueri potest; inter alia mirari subit, omnes ferè, exemplum illorum hac in re deseruisse. Quippe compertum est, antiquos Philosophos non permisisse, ἀγεωμετρήτους scholas suas ingredi, ut ad Sapientiæ studium admitterentur, quique ante non haberent λαβὰς τῆς φιλοσοφίας. Quod sanè propositum, non ratione prudentius, quàm eventu felicius fuit: cum hanc fuisse causam, quòd ad illam pertigerint scientiam, quàm posteritas tantopere miratur: & quò virtute sua nonnulla eniti se posse desperant, conjiciam. Frustra enim spectatur fructus disciplinarum, ab eo, qui earum altitudinem non metitur; nec in cacumen evadere potest, qui non solerter rimatur viam, & aditus, qui eò ferunt, negligit. Mathesis autem, cum ex notionibus simplicissimis, cognituque facillimis, ad difficiliora, atque remotissima quæque cognoscenda perducat juniores, qui præconceptis opinionibus vacui non impediuntur varietate rerum, quæ animis provectiorum inhærent; non dubito, quin si ea à teneris imbuatur mens, ad aliarum quoque rerum, maximè compositarum atque obscuriorum, cognitionem sit penetratura. Et quoniam Mathesis variis partibus constat, quæ omnes circa quantitatem versantur; res à nostri seculi Luminibus eò redacta est, ut generaliter illæ omnes tractari, & quantitas hac in universali & abstracto per literas Alphabeti concipi possit. Ita enim, factâ ad omnes quantitatis species applicatione, intellectus ratiocinando ad varias res inveniendas distinctè progredi potest. Postquam autem Methodus illa diu latuit, tecta verborum involucris, cum quibus prius luctandum erat quàm fructus ullus sperari poterat; opportunè nobis Nobilissimus D. Des-Cartes, insuperabilis ingenii Vir (qui, reclusâ à se, hactenus incognitâ, ad veram sapientiam viâ, post tot seculorum fœdissimam servitutem, omnibus imitando exemplo, ita naturæ mysteria pandit, ut veræ sapientiæ studium, humanarumque scientiarum encyclopædia & perfectio,

fectio, immaturâ ejus ac deplorabili morte, majorem nunquam jacturam facere potuerit) eam ad hanc facilitatem perduxit, ut, quod difficultatis reliquum est, non aliâ ratione quàm studio & diligentia evinci possit. Taceo hic perfectionem, ad quam res Mathematicas hujus Methodi subsidio redegit: cum ipsarum testimonia non tantùm invitos laudumque suarum detractores in illis palmam ei dare cogant, sed etiam quousque, humanum ingenium in iisdem progredi quidve præstare valeat determinent. Verùm enimvero cum omnium magnarum rerum sicut arborum altitudo nos delectet, & radices stirpesque non item: sic multi ad summa pervenire optarent, nisi in elementis hærere opus haberent. Atqui, quemadmodum illa altitudo sine radicibus, stirpibusque esse non potest; ita illi frustra se in id fastigium recipi sperant, quibus cordi non est fundamenta fideliter jacere. Et cum antehac non edita sint ulla principia, quæ ad adita hujus Methodi ducerent; quid mirum? si multi in ipso limine hæsitaverint, pluresque, quos, re inexpertâ, desperatio in fugam avertit. Et enim nec hujus Methodi Auctor, nec Doctissimi ejus Commentatores à semetipsis impetrare potuerunt, ut bonas horas, quas subtilioribus inventis dicaverant, in edendis, quæ viam ad hanc Methodum sternerent, impenderent. Cum itaque nihil hac in re, omnibus votis, tam à me ipso olim, quàm à multis hodie expetita, præstitum esse reperi rim: diu multumque inter spem & metum hærens, dolui, tamdiu inter tot Mathematicorum monumenta ea desiderari, quæ ad scientiarum incrementa emunctioris naris homines necessariò requiri jam pridem censuerunt. Ego sanè opportunitate mira, ante aliquot annos voti campos factus, postquam ad hasce oras Academiam Illustrem, quæ Leidæ est, accessi, Vir Celeberrimus atque Doctissimus Franciscus à Schooten, Matheseos ibidem Professor publicus, me Artem Analyticam, hancque Methodum, tam eximia fide docuit, ut ad perfectionem

nihil mihi præter ingenium & propriam industriam defuisse crediderim. Quocirca sepositâ privati commodi æstimatione ut plures felicitatis hujus participes facerem, & quæ propriis usibus destinaveram, publici juris redderem, de elementis hisce, quibus inter alia imbutus eram, evulgandis, cogitare cœpi. Et licèt vererer ne amicitiæ jura, quæ inter nos cum fido semper servari optabam, hac ratione violarem; tamen facilem mihi veniam sperabam, si non nisi officiosa fraude fallerem, quæ gloriæ ejus, qui se bono publico uni devovit, cedere, nec aliàs magis animum meum ingratum testari posset. Ac ne primas quidem spes fortuna destituit: quippe ab ipso, qui nullum erga me benevolentiæ pignus atque indicium omittit, non modò veniam hujus zeli impetravi, sed & eam humanitatem, ut omnia perlegere & examinare haud gravatus fuerit, lucemque ingenii & consilii sui porrigere. Operis brevitatem quod attinet, non est, quam displicere cuipiam putem: siquidem copiam exemplorum, quibus ad discendum nihil aptius, nullus (ut opinor) hîc desiderabit; in quibus afferendis ejusmodi delectus est observatus, ut, quoad fieri potuit, in medium adducerentur ea, quæ vel in ipso Auctore, vel in ejus Commentatoribus reperiuntur: quæ ideo sparsim ita sunt disposita, ut, meo judicio, non alio loco meliùs intelligi, simulque prædictis locis illustrandis inservire potuerint, in quem finem, in margine paginarum citationem additam esse apparebit. Adeò ut, quicunque tantùm Arithmeticæ Species, cum in integris, tum in fractis perdidicerit, levique numerorum irrationalium notitiâ instructus, in allatis exemplis accuratè examinandis sese exercuerit, se non inutiliter tempus, ubi ad Geometriam Dni. Des-Cartes accesserit, consumpsisse experturus sit. Quin imò videbit januam reseratam omni ei, quod ab Algebra & Analysi Geometrica exspectari potest: ideoque se Matheseos Universalis constitutionem animo comprehendisse, neque enim existimo, hisce intellectis, operæ pretium fore, Algebræ vul-

vulgaris cognitionem ampliùs exoptare, licèt leviorem ejus notitiam, vel ipse D. Des-Cartes, antehac, ad sua Geometriæ Methodum intelligendam, requisiverit. Vale.

CATALOGUS

eorum,

Quæ hoc Opere continentur.

FRANCISCI à SCHOOTEN Principia Matheſeos Unverſalis, ſeu Introductio ad CARTESIANÆ GEOMETRIÆ Methodum. Conſcripta ab ERASMO BARTHOLINO.

FLORIMONDI DE BEAUNE duo Tractatûs poſthumi. Alter de Natura & Conſtitutione, alter de Limitibus Æquationum.

JOHANNIS DE WITT de Elementis Curvarum Linearum libri duo.

FRANCISCI à SCHOOTEN Tractatus de concinnandis Demonſtrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico.

Notæ & Animadverſiones tumultuariæ in univerſum opus.

PRINCIPIA MATHESEOS UNIVERSALIS, SEU INTRODUCTIO AD GEOMETRIÆ METHODUM RENATI DES CARTES.

De logistica quantitatum simplicium.

CUm in omni Scientia, ad difficiliorum rerum cognitionem, utile sit à simplicissimis & cognitu facillimis ordiri; haud inconsultum fuerit, ad generalem atque facilem comprehensionem Mathematicarum Scientiarum, quæ omnes circa quantitatem versantur, ad ea primùm attendere, quæ non aliquam ejus speciem excludere, sed eas, quocunque se habeant modo, sub certis notis cuique obviis repræsentare possint. Unde cum in universa illarum Scientiarum constitutione, licèt diversa objecta respiciant, non nisi relationes sive proportiones quædam, quæ in iis reperiuntur, considerentur; consentaneum est rationes atque proportiones illas seorsim spectare, easque literis Alphabeti, utpote notis simplicissimis nobisque cognitissimis, insignire. Neque enim ratio ulla est, quo minùs per *a*, *b*, *c*, &c. concipiantur magnitudines *a*, *b*, *c*, &c. quàm pondera aut numeri iisdem characteribus designati. Attamen quia tum phantasiæ tum sensibus ipsis, nihil simplicius nec distinctius exhiberi posse occurrit, quàm rectæ lineæ, quæque relationes & proportiones, quæ inter omnes alias res inveniuntur, exprimere valent: præstat per prædictas literas

Vide differtationem de methodo, parte secunda.

teras solummodo lineas rectas concipere. Hinc si duæ fuerint quantitates designatæ per a & b, intelligentur per ipsas duæ differentes lineæ rectæ, diversæ scilicet longitudinis: ita ut per a intelligatur longitudo seu quantitas unius, & per b longitudo seu quantitas alterius. Non secus atque per a & a, aut per b & b duæ intelliguntur lineæ æquales; nisi indicaveris supposuérisve a esse æqualem ipsi b, vel a & b ejusdem esse valoris, id quod sic denotatur $a \propto b$. Et sic de aliis.

Cum autem non rarò occurrat, ut linea aliqua sit aliquoties sumenda, oportet tantùm numerum convenientem ipsi literæ præfigere: Ut ad designandum, lineam a esse bis sumendam, scribo $2a$. Sic & ad designandum duplum, triplum, quadruplum &c. ipsius b, scribo $2b$, $3b$, $4b$, &c. Nec aliter fit si ad designandum semissem, tertiam aut aliam quamcunque partem lineæ a, scribatur $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. id quod etiam hoc pacto fieri solet $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, &c. sic & duas tertias, tres quartas, &c. ipsius b, ita designaveris $\frac{2}{3}b$, $\frac{3}{4}b$: vel sic, $\frac{2b}{3}$, $\frac{3b}{4}$, atque ita de aliis.

Jam cum in universa Mathesi operationes omnes ad quinque diversas (vulgò Species dictas) reduci possint, quæ sunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, & Radicum extractio; consequens est ut ostendatur, quâ ratione dictæ operationes per literas sint instituendæ.

De Additione quantitatum simplicium.

IGitur ad addendum lineam a ad lineam a, scribo pro summa $2a$: sic & ad addendum $2b$ ad $3b$, scribo $5b$. Lineæ enim eisdem literis si denotantur, oportet tantùm numeros præfixos addere, & summam eidem literæ præfigere. Si verò diversæ fuerint, additio fiet interposito signo $+$, quod denotat plus. Ut si ad lineam a sit addenda linea b, scribo $a+b$, hoc est, a plus b, quo indicatur b esse additam ipsi a, vel adhuc esse addendam. Ubi patet dictum signum semper esse referendum ad sequentem literam, seu quæ priori addi debet.

Nec aliter fit, si plures in unam summam sunt colligendæ. Ut ad addendum $2b$, b, & $3b$, scribo $6b$. Sic & ad addendum a, b, & c, scribo $a+b+c$.

Exem-

Exempla additionis simplicium.

				$2b.$
Add.	$a.$	$2b.$	$3d.$	$b.$
	$a.$	$3b.$	$d.$	$3b.$
Summa	$2a.$	$5b.$	$4d.$	$6b.$

				$a.$
Add.	$a.$	$a.$	$3c.$	$b.$
	$b.$	$2b.$	$4d.$	$c.$
Summa	$a+b.$	$a+2b.$	$3c+4d.$	$a+b+c.$

Ubi notandum, in additione literarum d & $3d$, cogitandum esse literam d sibi præfixam habere unitatem: id quod etiam in sequenti exemplo & similibus est observandum: ut &, cùm plures addun-tur diversæ literæ, perinde esse quo ordine scribantur, ut $a+b$, vel $b+a$.

De Subtractione quantitatum simplicium.

JAm verò ad subtrahendum lineam $2a$ à linea $5a$, scribendum est $3a$: siquidem lineæ, quæ iisdem literis sunt designatæ, subducuntur, subtrahendo tantùm à se invicem numeros præfixos. Sic & si $2b$ auferantur à $3b$, reliquum erit $1b$ seu. b. Similiter sublato d de $4d$, relinquitur $3d$: At a de a manet o seu nihil.

Quòd si verò lineæ diversis literis notatæ fuerint, subductio fiet interposito signo —, quod denotat minus. Ut si ab a subtrahenda sit b, scribo $a-b$, hoc est, a minus b, quo indicatur b esse sublatam ex a, vel adhuc esse subducendam. Ubi patet dictum signum semper esse referendum ad sequentem literam, hoc est, quæ ex priori est subtrahenda.

Eodem modo, sublatis $4d$ ex $3c$, reliquum erit $3c-4d$.

Exempla subtractionis simplicium.

Ex	$5a.$	$3b.$	$4d.$	$a.$	Ex	$a.$	$3c.$	$a.$	$2c.$
subtr.	$2a.$	$2b.$	$d.$	$a.$	subtr.	$b.$	$4d.$	$4b.$	$d.$
reliq.	$3a.$	$b.$	$3d.$	o.	reliq.	$a-b.$	$3c-4d.$	$a-4b.$	$2c-d.$

Unde notandum, in ejusmodi quantitatum subtractione, oportere quantitatem illam, quæ ex alia subtrahi debet, esse minorem:

 hoc

hoc est, ad subtrahendum b ex a, (ut in superiori exemplo) opus esse, ut b sit minor quàm a. Quòd si autem non proponatur aut constet, utra quantitas sit major aut minor, & tamen subductio fieri debeat; differentia earum denotari poterit hoc modo: $a = b$, hoc est, $a - b$ vel $b - a$.

De Multiplicatione quantitatum simplicium.

POrrò ad multiplicandum lineam a per lineam b, scribo ab vel ba. Sic & ad multiplicandum a per a hoc est, a in se, scribo aa seu a^2: & aaa seu a^3 ad prædictum productum aa adhuc semel multiplicandum per a. Adeò ut literæ immediatè sese consequentes, multiplicationem earum per invicem factam, vel adhuc faciendam esse, indicent. Non secus, si multiplicare velim a, b & c per invicem, scribo abc, vel bac, vel cba, &c: & abb seu ab^2 vel b^2a, ad multiplicandum a, b, & b. Hic enim, ut in additione, non refert, quo ordine scribantur.

Quemadmodum verò ex ductu alicujus numeri in se, id quod producitur vocatur Quadratum ejusdem numeri, & si productum illud adhuc semel per eundem numerum multiplicetur, productus numerus appellatur ipsius Cubus, atque ita deinceps; ita quoque si a multiplicetur per a, productum aa seu a^2 appellari consuevit a quadratum, seu a duarum dimensionum; & si aa rursus multiplicetur per a, producetur aaa seu a^3, quod ideo appellari poterit a cubus, seu a trium dimensionum: atque ita a^4, a^5, a^6, &c. dici poterunt a quadrato-quadratum, a surdesolidum, a quadrato-cubus, &c. seu, a habens 4, 5, aut 6. &c. dimensiones.

Sicuti autem numerus aliquis, si in se ducatur, dicitur radix quadrata istius producti seu quadrati: & si adhuc semel per hoc productum multiplicetur, tum radix Cubica hujus posterioris producti appellatur, &c; sic & a dicitur radix Quadrata ex aa seu a^2, & radix Cubica ex a^3, & radix Quadrato-Quadrata ex a^4, & radix Surfolida ex a^5, & radix Quadrato-Cubica ex a^6, atque ita porrò. Idem de reliquis est intelligendum.

Ex quibus constat diligenter esse notandum, quòd magnum sit discrimen inter aliquam quantitatem, cui numerus aliquis præfixus est, & inter eandem quantitatem, ubi idem numerus à tergo est adscriptus. Ut inter $2a$ & a^2, $3a$ & a^3, $4a$ & a^4, &c. siquidem per $2a$, $3a$, $4a$ &c. simpliciter intelligitur quantitas a bis, ter, quater,

ter, &c. sumta, hoc est, a sibi ipsi toties addita: at verò per a^2, a^3, a^4, &c. Quadratum, Cubus, Quadrato-Quadratum, &c. ipsius a, hoc est, ipsa quantitas a toties posita & multiplicata.

Exempla multiplicationis simplicium.

Multipl.	a.	a	aa	ab	ab	ab	aa	a^3.
per	b.	a	a	c	b	cd	ab	a^3.
productum	ab.	aa.	a^3.	abc.	abb	$abcd$.	a^3b.	a^6.

Ubi notandum in a^3b, producto multiplicationis quantitatum aa & ab, numerum ternarium quantitatem præcedentem a respicere, non autem sequentem b: quod, cum brevitatis causâ scribatur pro $aaab$, in omnibus similibus casibus quoque est intelligendum. Eâdem ratione, ad multiplicandum a^3, hoc est, aaa per a^3 seu aaa, producetur a^6, hoc est, $aaaaaa$.

Quòd si quantitates occurrant multiplicandæ, quibus numeri, sive integri sive fracti, præfiguntur, oportebit dictos numeros in se invicem ducere, ut in vulgari Arithmetica, & eorum productum præfigere producto, quod exsurgit ex multiplicatione quantitatum dictarum. Ut ad multiplicandum $2a$ per $3b$; multiplicatis 2 per 3, provenit 6, quod si præfigatur ipsi ab, producto quantitatum a & b per invicem, erit quæsitum productum $6ab$. Similiter multiplicatis $2b$ per c, productum erit $2bc$. nam unitas, quæ hic ipsi c præfigi subintelligitur, ducta in 2, producit 2.

Necaliter fit, si ad multiplicandum $3ab$, hoc est, ter ab per $2cd$, hoc est, bis cd, scribatur $6abcd$. Sic &, multiplicatis $\frac{1}{2}aa$ per $\frac{1}{3}ab$, hoc est, semisse ipsius aa per tertiam partem ipsius ab, productum fiet $\frac{1}{6}a^3b$, hoc est, $\frac{1}{6}aaab$.

Exempla multiplicationis.

Multipl.	$2a$	$2b$	$\frac{3}{2}a$	$3ab$	$\frac{1}{2}aa$	a^3	$6a^3$.
per	$3b$	c	$\frac{1}{2}d$	$2cd$	$\frac{1}{3}ab$	$3b^3$	$\frac{2}{3}a^3$.
product.	$6ab$.	$2bc$.	$\frac{3}{4}ad$.	$6abcd$.	$\frac{1}{6}a^3b$.	$3a^3b^3$.	$4a^6$.

Ubi tandem sciendum, quòd licet ex multiplicatione producantur quantitates plurium dimensionum seu literarum; earum tamen additionem atque subtractionem non aliter fieri atque præcedentium.

tium. Ut ad addendum $2ab$ ad $3ab$, ſcribitur $5ab$: & ad addendum $6ab$ ad $2bc$, ſcribitur $6ab+2bc$. Non ſecus, ad ſubtrahendum $2ab$ de $3ab$, ſcribitur ab: & ad ſubtrahendum $2bc$ de $6ab$, ſcribitur $6ab-2bc$. Et ſic de aliis.

De Diviſione quantitatum ſimplicium.

QUoniam verò diviſio reſolvit id, quod multiplicatio componit: facilè apparet, ad dividendam quantitatem ab ſeu ba per a, opùs tantùm eſſe ex quantitate dividenda ab tollere quantitatem a, quæ diviſor eſt, & pro quotiente ſcribere reliquam quantitatem b. Eodem modo, ſi dividatur aa per a, orietur a; & aaa ſeu a^3 per a, orietur aa. Non ſecus diviſâ abc per a, fiet bc: at per b, fiet ac: & per c, fiet ab.

Quòd ſi verò quantitates dividendæ occurrant, quibus numeri ſint præfixi; oportet, factâ diviſione quantitatum, ut jam oſtenſum eſt, ſimiliter dictos numeros dividere, ut in Arithmetica vulgari, & quod oritur invento quotienti quantitatum præfigere.

Exempla diviſionis ſimplicium.

$$\begin{matrix}\text{Divid.}\\ \text{per}\end{matrix}\left.\begin{matrix}ab\\ a\end{matrix}\right\} b\ \text{quot.}\quad \left.\begin{matrix}aa\\ a\end{matrix}\right\} a.\quad \left.\begin{matrix}a^3\\ a\end{matrix}\right\} aa.\quad \left.\begin{matrix}abc\\ a\end{matrix}\right\} bc.\quad \left.\begin{matrix}abc\\ ab\end{matrix}\right\} c.\quad \left.\begin{matrix}a^3b\\ ab\end{matrix}\right\} aa.\quad \left.\begin{matrix}a^5\\ aa\end{matrix}\right\} a^3.$$

$$\begin{matrix}\text{Divid.}\\ \text{per}\end{matrix}\left.\begin{matrix}6ab\\ 2a\end{matrix}\right\} 3b.\quad \left.\begin{matrix}\frac{1}{6}a^3b\\ \frac{1}{3}ab\end{matrix}\right\} \tfrac{1}{2}aa.\quad \left.\begin{matrix}3a^3b^3\\ 3b^3\end{matrix}\right\} 1a^3\ \text{ſeu}\ a^3.\quad \left.\begin{matrix}3a^3b^3\\ a^3\end{matrix}\right\} 3b^3.$$

Cùm autem occurrunt quantitates dividendæ, ex quibus literæ diviſoris præcedenti modo tolli nequeunt; ſubſcribitur Diviſor ipſi Dividendo interjectâ lineolâ, ad modum fractionis Arithmeticæ vulgaris. Ut ad dividendum ab per c, ſcribo $\frac{ab}{c}$, quo indicatur ab eſſe diviſam per c, vel adhuc eſſe dividendam. Sic & ad dividendum a per b, ſcribitur $\frac{a}{b}$. ſimiliter diviſâ abc per de, quotiens erit $\frac{abc}{de}$. & ſic de aliis. Quæ quidem quantitates ſic diviſæ appellantur Fractiones.

Eſt verò hìc obiter notandum, diviſis a per a, $2b$ per $2b$, ſimilibúſve, quotientem eſſe 1: ſiquidem quævis quantitas ſe ipſam ſemel continet, ideóque per ſeipſam diviſa, unitatem profert.

De logistica quantitatum compositarum.

EXplicatâ Simplicium quantitatum operatione, quoniam ex illarum additione & subtractione oriuntur quantitates, per signum + compositæ, aut per signum — disjunctæ, (quæ communiter generali nomine Compositæ dicuntur); consequens est, ut harum quoque operationem deinceps ostendamus.

De Additione quantitatum compositarum.

IGitur ad addendum quantitates Compositas, iisdem literis notatas, oportet considerare signa + & —, quibus afficiuntur, & notare, si eadem fuerint, additionem fieri ut in simplicibus, & earum summæ præfigi idem signum. Ut ad addendum $a + 3b$ ad $a + 2b$: additis a ad a, & $3b$ ad $2b$, summa erit $2a + 5b$. Eodem modo $2a - b$ additum ad $3a - 3b$, facit summam $5a - 4b$.

Quòd si verò signa diversa fuerint, subtrahendæ erunt quantitates eisdem literis denotatæ, sicut in subtractione simplicium, & ei quod relinquitur præfigendum est signum, quo major quantitas afficitur. Ut si addendum sit $3b + 5a$ ad $2b - 2a$: additis $3b$ ad $2b$, & subtractis $2a$ ex $5a$, summa erit $5b + 3a$. Similiter si $a + d$ addatur ad $a - 4d$, fiet summa $2a - 3d$. Ubi patet si $2b + a$ addatur ad $3b - a$, summam fore $5b$: quantitates enim $+a$ & $-a$, cum propter diversa signa sint subtrahendæ, se mutuò tollunt.

Jam ad addendum quantitates diversis literis denotatas, oportet tantùm eas suis signis connectere. Ut ad addendum $a + b$ ad $c - d$, scribo $a + b + c - d$: siquidem quantitas c, & omnis alia cui nullum præponitur signum, intelligitur sibi præfixum habere signum +.

Exempla additionis compositarum.

Add.	$a + 3b$	$2a - b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}bb$	$a^3 - \frac{5}{4}abc$	$aa + 2a - 3.$
	$a + 2b$	$3a - 3b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{4}abc$	$aa + a - 6.$
summa	$2a + 5b.$	$5a - 4b.$	$ab + bb.$	$\frac{5}{3}a^3 - 2abc.$	$2aa + 3a - 9.$

Add.	$3b + 5a$	$a + d.$	$2b + a.$	$aa - 2ab$	$3a^3 - \frac{1}{3}aab$	$aa - 5a + 6.$
	$2b - 2a$	$a - 4d.$	$3b - a.$	$aa + ab$	$2a^3 + \frac{1}{2}aab$	$aa + a - 6.$
aggr.	$5b + 3a.$	$2a - 3d.$	$5b.$	$2aa - ab.$	$5a^3 + \frac{1}{6}aab.$	$2aa - 4a.$

Add.

tium. Ut ad addendum $2ab$ ad $3ab$, ſcribitur $5ab$: & ad addendum $6ab$ ad $2bc$, ſcribitur $6ab+2bc$. Non ſecus, ad ſubtrahendum $2ab$ de $3ab$, ſcribitur ab: & ad ſubtrahendum $2bc$ de $6ab$, ſcribitur $6ab-2bc$. Et ſic de aliis.

De Diviſione quantitatum ſimplicium.

QUoniam verò diviſio reſolvit id, quod multiplicatio componit: facilè apparet, ad dividendam quantitatem ab ſeu ba per a, opùs tantùm eſſe ex quantitate dividenda ab tollere quantitatem a, quæ diviſor eſt, & pro quotiente ſcribere reliquam quantitatem b. Eodem modo, ſi dividatur aa per a, orietur a; & aaa ſeu a^3 per a, orietur aa. Non ſecus diviſâ abc per a, fiet bc: at per b, fiet ac: & per c, fiet ab.

Quòd ſi verò quantitates dividendæ occurrant, quibus numeri ſint præfixi; oportet, factâ diviſione quantitatum, ut jam oſtenſum eſt, ſimiliter dictos numeros dividere, ut in Arithmetica vulgari, & quod oritur invento quotienti quantitatum præfigere.

Exempla diviſionis ſimplicium.

$$\text{Divid. } \left.\begin{matrix} ab \\ \text{per } a \end{matrix}\right\} b \text{ quot. } \left.\begin{matrix} aa \\ a \end{matrix}\right\} a. \quad \left.\begin{matrix} a^3 \\ a \end{matrix}\right\} aa. \quad \left.\begin{matrix} abc \\ a \end{matrix}\right\} bc. \quad \left.\begin{matrix} abc \\ ab \end{matrix}\right\} c. \quad \left.\begin{matrix} a^3b \\ ab \end{matrix}\right\} aa. \quad \left.\begin{matrix} a^5 \\ aa \end{matrix}\right\} a^3.$$

$$\text{Divid. } \left.\begin{matrix} 6ab \\ \text{per } 2a \end{matrix}\right\} 3b. \quad \left.\begin{matrix} \frac{1}{6}a^3b \\ \frac{1}{3}ab \end{matrix}\right\} \tfrac{1}{2}aa. \quad \left.\begin{matrix} 3a^3b^3 \\ 3b^3 \end{matrix}\right\} 1a^3 \text{ ſeu } a^3. \quad \left.\begin{matrix} 3a^3b^3 \\ a^3 \end{matrix}\right\} 3b^3.$$

Cùm autem occurrunt quantitates dividendæ, ex quibus literæ diviſoris præcedenti modo tolli nequeunt; ſubſcribitur Diviſor ipſi Dividendo interjectâ lineolâ, ad modum fractionis Arithmeticæ vulgaris. Ut ad dividendum ab per c, ſcribo $\frac{ab}{c}$, quo indicatur ab eſſe diviſam per c, vel adhuc eſſe dividendam. Sic & ad dividendum a per b, ſcribitur $\frac{a}{b}$. ſimiliter diviſâ abc per de, quotiens erit $\frac{abc}{de}$. & ſic de aliis. Quæ quidem quantitates ſic diviſæ appellantur Fractiones.

Eſt verò hìc obiter notandum, diviſis a per a, $2b$ per $2b$, ſimilibúſve, quotientem eſſe 1: ſiquidem quævis quantitas ſe ipſam ſemel continet, ideóque per ſeipſam diviſa, unitatem profert.

DE LOGISTICA QUANTITATUM COMPOSITARUM.

EXplicatâ Simplicium quantitatum operatione, quoniam ex illarum additione & ſubtractione oriuntur quantitates, per ſignum + compoſitæ, aut per ſignum — disjunctæ, (quæ communiter generali nomine Compoſitæ dicuntur); conſequens eſt, ut harum quoque operationem deinceps oſtendamus.

De Additione quantitatum compoſitarum.

IGitur ad addendum quantitates Compoſitas, iiſdem literis notatas, oportet conſiderare ſigna + & —, quibus afficiuntur, & notare, ſi eadem fuerint, additionem fieri ut in ſimplicibus, & earum ſummæ præfigi idem ſignum. Ut ad addendum $a+3b$ ad $a+2b$: additis a ad a, & $3b$ ad $2b$, ſumma erit $2a+5b$. Eodem modo $2a-b$ additum ad $3a-3b$, facit ſummam $5a-4b$.

Quòd ſi verò ſigna diverſa fuerint, ſubtrahendæ erunt quantitates eiſdem literis denotatæ, ſicut in ſubtractione ſimplicium, & ei quod relinquitur præfigendum eſt ſignum, quo major quantitas afficitur. Ut ſi addendum ſit $3b+5a$ ad $2b-2a$: additis $3b$ ad $2b$, & ſubtractis $2a$ ex $5a$, ſumma erit $5b+3a$. Similiter ſi $a+d$ addatur ad $a-4d$, fiet ſumma $2a-3d$. Ubi patet ſi $2b+a$ addatur ad $3b-a$, ſummam fore $5b$: quantitates enim $+a$ & $-a$, cum propter diverſa ſigna ſint ſubtrahendæ, ſe mutuò tollunt.

Jam ad addendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet tantùm eas ſuis ſignis connectere. Ut ad addendum $a+b$ ad $c-d$, ſcribo $a+b+c-d$: ſiquidem quantitas c, & omnis alia cui nullum præponitur ſignum, intelligitur ſibi præfixum habere ſignum +.

Exempla additionis compoſitarum.

Add.	$a+3b$	$2a-b$	$\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}bb$	$a^3-\frac{5}{4}abc$	$aa+2a-3.$
	$a+2b$	$3a-3b$	$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc$	$aa+a-6.$
ſumma	$2a+5b.$	$5a-4b.$	$ab+bb.$	$\frac{5}{3}a^3-2abc.$	$2aa+3a-9.$

Add.	$3b+5a$	$a+d.$	$2b+a.$	$aa-2ab$	$3a^3-\frac{1}{3}aab$	$aa-5a+6.$
	$2b-2a$	$a-4d.$	$3b-a.$	$aa+ab$	$2a^3+\frac{1}{2}aab$	$aa+a-6.$
aggr.	$5b+3a.$	$2a-3d.$	$5b.$	$2aa-ab.$	$5a^3+\frac{1}{6}aab.$	$2aa-4a.$

Add.

Add.	$a+b$	$2aa+3ab-bb.$	$3abc$	$a^3+2abb-aab+abc.$
Summa	$c-d$	$5ab-3aa$	a^3-abc	$a^3+aab-3abb-b^3.$
seu aggr.	$a+b+c-d.$	$8ab-aa-bb.$	$a^3+2abc.$	$2a^3-abb+abc-b^3.$

E quibus manifestum fit, (cum ad addendum $3b+5a$ ad $2b-2a$, scribi possit $3b+5a+2b-2a$, hoc est, $5b+3a$: siquidem $+3b$ & $+2b$ faciunt $5b$, & $+5a-2a$ faciunt $+3a$) quantitates eisdem literis denotatas, quando diversa habent signa, subtrahendas esse, & summæ ascribendum esse signum majoris quantitatis.

De Subtractione quantitatum compositarum.

Porrò ad subtrahendum quantitates compositas, quæ eisdem literis sunt denotatæ, sciendum est: si signa eadem fuerint, & quantitas è qua subtractio fieri debet, major sit quantitate subducendâ; tum subtractionem fieri ut in simplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum esse idem signum. Ut si subtrahatur $a+2b$ ex $2a+5b$: (subtractis a ex $2a$, & $2b$ ex $5b$,) remanet $a+3b$. Non secus si subtrahatur $3a-3b$ ex $5a-4b$, reliquum erit $2a-b$.

Si verò signa eadem fuerint, & quantitas à qua subtractio fieri debet quantitate subducendâ minor sit; oportet, subtractâ minore ex majore, residuo signum contrarium præponere. Ut si subtrahendum sit $a+3b$ ab $3a+2b$: subtractis a ex $3a$, & $2b$ ex $3b$, residuum erit $2a-b$. Similiter, sublatis $a-3b$ ex $2a-b$, relinquitur $a+2b$.

Quòd si quantitates iisdem literis designatæ, atque ad subtrahendum propositæ, diversa signa habeant; erunt ipsæ addendæ, ut in simplicibus, & summæ præfigendum signum quantitatis, à qua subductio fieri debet. Ut si velimus subtrahere $a-b$ ex $2a+b$: subtractis a ex $2a$, additisque b ad b, residuum erit $a+2b$. Eodem modo, $2a+5d$ subductum à $3a-2d$, relinquet $a-7d$.

Cæterùm ad subtrahendum quantitates diversis literis denotatas, oportet quantitates subducendas, variatis signis connectere cum iis, à quibus subductio fieri debet. Ut si subtrahi debeat $c-d$ ab $a+b$; erit differentia seu residuum $a+b-c+d$; variatis nempe signis quantitatum c & d.

Exem-

Exempla ſubtractionis compoſitarum.

Ex	$2a+5b$	$5a-4b$	$\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}bb$	$a^3-\frac{5}{4}abc+abb-b^3$	$2aa+3a-9.$
Subtr.	$a+2b$	$3a-3b$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc+abb-b^3$	$aa+2a-3.$
Reliq.	$a+3b.$	$2a-b.$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb.$	$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}abc.$	$aa+a-6.$
Ex	$3a+2b$	$2a-b$	$2aa-ab$	$5a^3+\frac{1}{6}aab-\frac{2}{3}abb$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a+3b$	$a-3b$	$aa-2ab$	$2a^3+\frac{1}{2}aab-abb$	$2aa-3a+9.$
Reſid.	$2a-b.$	$a+2b.$	$aa+ab.$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{1}{3}abb.$	$aa+a-3.$
Ex	$2a+b$	$3a-2d$	$8ab-aa$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{2}{3}abb-b^3$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a-b$	$2a+5d$	$2aa-3ab$	$-2a^3+\frac{2}{3}aab$	$aa+a-3.$
Diff.	$a+2b.$	$a-7d.$	$11ab-3aa.$	$5a^3-aab+\frac{2}{3}abb-b^3.$	$2aa-3a+9.$
Ex		$a+b$	$2aa-4a$	$3abc$	$a^3+aab-abb-b^3.$
Subtr.		$c-d$	$aa+a-6$	a^3-abc	$aab-2a^3+c^3-abb.$
Rel. reſid. ſeu diff.		$a+b-c+d.$	$aa-5a+6.$	$4abc-a^3.$	$3a^3-b^3-c^3.$

E quibus perſpicuum fit (cum ad ſubtrahendum $a+3b$ ex $3a+2b$ ſcribi poſſit $3a+2b-a-3b$, hoc eſt, $2a-b$, ſubtractis nempe a ex $3a$ & $2b$ ex $3b$) : quantitates eiſdem literis denotatas, quando eadem habent ſigna, ſed quantitates ſubducendæ aliis ſunt majores, ſubtrahendas eſſe, & relicto præponendum eſſe ſignum contrarium.

Similiter, quoniam ad ſubtrahendum $a-b$ ex $2a+b$ ſcribere poſſum $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$, (ſubtrahendo videlicet a à $2a$, & addendo b ad b) patet, quâ ratione, quantitates eiſdem literis deſignatæ, cùm diverſa habuerint ſigna, ſint addendæ, & ſummæ præfigendum ſit ſignum ejus, à quâ ſubtractio fieri debet. Quòd autem ſubtrahendo $a-b$ ex $2a+b$, ſcribendum ſit $2a+b-a+b$, variatis nempe ſignis quantitatum ſubducendarum, inde manifeſtum fit; quòd ad ſubtrahendum a ex $2a+b$ differentia denotetur per $2a+b-a$, utpote ſubducendo quantitatem a, præponendo ei ſignum $-$, ut in ſubtractione ſimplicium eſt dictum: at quoniam ſubducendo quantitatem a ex $2a+b$, plus juſto tollitur, ſiquidem non a abſolutè tollendum proponitur, ſed diminutum quantitate b; hinc fit, ut $2a+b-a$ minor ſit quàm juſta differentia, quantitate b: adeoque ad veram differentiam obtinendam, oportet addere quantitatem b, & ſcribere $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$. Et ſic de aliis.

De Multiplicatione quantitatum compositarum.

Post hæc, ad multiplicandum quantitates compositas, operatio institui potest ad modum Arithmeticæ vulgaris: oportet enim earum partes multiplicare in se invicem, ut in simplicibus est ostensum, atque producta simul addere. Quod autem ad signa + & — attinet iisdem præfigenda, sciendum est: eadem signa (hoc est + per +, vel — per —) facere signum +, diversa verò (hoc est + per —, vel — per +) facere —. Ut ad multiplicandum $a+b$ per c: multiplicatis $+a$ per $+c$, & $+b$ per $+c$, fiunt $+ac$, & $+bc$: quibus additis, fit productum $+ac+bc$, seu $ac+bc$. Sic si multiplicandum sit $a-b$ per c, producetur $ac-bc$.

Nec aliter fit, si ad multiplicandum proponatur $a+b$ per $c+d$: multiplicatis enim $a+b$ per c, ut ante; & rursus $a+b$ per d (siquidem $a+b$ non tantùm per c, sed etiam per d multiplicari debet): fiet $ac+bc+ad+bd$. Non secus ad multiplicandum $a-b$ per $c-d$ scribitur $ac-ad-bc+bd$: multiplicatis nempe primùm $a-b$ per $+c$, fit $+ac-bc$: deinde $a-b$ per $-d$, fit $-ad+bd$. quippe $+a$ per $-d$, producit $-ad$: at $-b$ per $-d$ producit $+bd$, juxta regulam. Et sic de aliis. Nec refert utrùm à dextra an verò à sinistra initium fiat, sicut sequentibus exemplis manifestum fiet.

Exempla multiplicationis compositarum.

Mult.	$a+b$	$a-b$	$a+b$	$a-b$	$a+b$
per	c	c	$c+d$	$c-d$	$a+b$
prod.	$ac+bc$.	$ac-cb$.	$ac+bc$	$ac-bc$	$+ab+bb$
			$+ad+bd$	$-ad+bd$	$aa+ab$
product.			$ac+bc+ad+bd$.	$ac-bc-ad+bd$.	$aa+2ab+bb$.

Multipl.	$a-b$	$a+b$	$aa-2ab+bb$	$aa-ab+bb$
per	$a-b$	$a-b$	$a-b$	$a+b$
	$-ab+bb$	$aa+ab$	$-aab+2abb-b^3$	$+aab-abb+b^3$
	$aa-ab$	$-ab-bb$	$a^3-2aab+abb$	$a^3-aab+abb$.
prod.	$aa-2ab+bb$.	$aa-bb$.	$a^3-3aab+3abb-b^3$.	a^3+b^3.

Mult.

Mult. $3dd + 4de + ee$ | $2a^3 + \frac{1}{2}aab + \frac{2}{3}abb$

per $3dd - ee$ | $\frac{2}{3}ab - \frac{1}{3}aa$

$$9d^4 + 12d^3e + 3ddee \qquad -a^5 - \frac{1}{4}a^4b - \frac{1}{3}a^3bb$$

$$-3ddee - 4de^3 - e^4 \qquad + \frac{4}{3}a^4b + \frac{1}{3}a^3bb + \frac{4}{9}aab^3$$

product. $9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4.$ $\quad \frac{13}{12}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5.$

Multipl. $4a^3 + 3aa - 2a + 1$

per $aa - 5a + 6$

$$+ 24a^3 + 18aa - 12a + 6$$

$$- 20a^4 - 15a^3 + 10aa - 5a$$

$$+ 4a^5 + 3a^4 - 2a3 + 1aa$$

product. $4a^5 - 17a^4 + 7a3 + 29aa - 17a + 6$

Cæterùm advertendum hic eſt, non rarò utile eſſe, multiplicationem hoc modo non inſtituere, ſed tantummodo eam innuere interſerendo voculam *in* vel M. Ut ad multiplicandum $4a^3 + 3aa - 2a + 1$ per $aa - 5a + 6$, ſcribo $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ in $\overline{aa - 5a + 6}$, vel $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ M $\overline{aa - 5a + 6}$.

Quòd autem + per −, vel − per + faciat −, ſic patet. Eſto $a - b$ multiplicandum per c, & ſit $a - b \infty e$: hinc ſi utrobique addatur b, fiet $a \infty b + e$. Jam quoniam æquales quantitates per eandem quantitatem multiplicatæ producunt æquales; ideo ſi utrinque multiplicetur per c, erit $ac \infty bc + ec$, hoc eſt, auferendo utrinque bc, erit $ac - bc \infty ec$. Quocirca cum ſtatuatur $a - b \infty e$, & utrâque parte ductâ in c, producatur $ac - bc \infty ec$; perſpicuum fit, $-b$ ductum in $+c$, producere $-bc$.

Nec aliter oſtendetur − per − multiplicatum producere +. Etenim ſi $a - b$ multiplicandum ſit per $c - d$: ponendo, ut ante, $a - b \infty e$, erit productum ex $a - b$ in $c - d$ æquale producto ex e in $c - d$ vel $c - d$ in e: id eſt, $ce - de$. Sed ce, ut ſupra, æquatur $ac - bc$: unde $ac - bc - de$ æquabitur producto ex $a - b$ in $c - d$. Porrò cum $a - b$ æqualis ſit poſita ipſi e, & utrâque parte ductâ in d, productum $ad - bd$ æquetur producto de: hinc ſi ex $ac - bc$ ſubtrahatur $ad - bd$ loco de, ei æquale; erit juxta regulam ſubtractionis $ac - bc - ad + bd$ productum quæſitum. E quibus liquet $-b$ multiplicatum per $-d$ producere $+bd$.

De Divisione quantitatum compositarum.

PRæterea, ad dividendum quantitates compositas, operatio non absimilis erit ei, quâ in Arithmetica vulgari duo integri numeri per se invicem dividuntur. Quod autem signa $+$ & $-$ concernit, sciendum est, si dividatur $+$ per $+$, aut $-$ per $-$, semper oriri $+$; at si $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ dividatur, semper oriri $-$. omnino ut in multiplicatione. Operationem autem sive à dextra sive à sinistra incipias perinde erit. Ut ad dividendum $ac+bc$ per c: divisis $+ac$ per $+c$, & $+bc$ per $+c$, fiunt ut in simplicibus est ostensum $+a$ & $+b$, unde quotiens quæsitus erit $a+b$. Similiter si dividatur $ac-cb$ per c, orietur $a-b$: divisis enim $+ac$ per $+c$, fit $+a$, & $-cb$ per $+c$, fit $-b$. Non dissimili ratione dividitur $ac+ad+bc+bd$ per $c+d$, & fit $a+b$. Cujus operatio talis est.

Divid.	$ac+ad+bc+bd$	$\frac{+ac}{+c}\big\vert +a.\quad \frac{+bc}{+c}\big\vert +b.$
per $c+d$)	$\underline{ac}+\underline{ad}+\underline{bc}+\underline{bd}$	
	o o o o	
Quotiens	$+a+b.$	

Diviso ac per c, (ut in simplicibus) fit a, scribendum sub linea in quotiente. hinc multiplicato divisore $c+d$ per quotientem inventum a, productum $ac+ad$ ex dividendo auferatur, scribendo partes ejusdem denominationis sub invicem, & reliquum sub linea infra ductâ. Unde cum subducto ac ex ac, & ad ex ad maneat nihil, scribitur sub linea ducta o. Deinde diviso $+bc$ per $+c$, fit $+b$, ascribendum priori quotienti. unde multiplicato divisore $c+d$ per hunc quotientem b, fit productum $+bc+bd$. id quod si scribatur, ut ante, sub dividendo, & fiat subductio; erit pro reliquo sub linea scribendum o. Et peracta erit divisio.

Eodem modo ad dividendum	$ac-ad-bc+bd$	$\frac{+ac}{+c}\big\vert +a$
per $c-d$:)	$\underline{ac}-\underline{ad}-\underline{bc}+\underline{bd}$	
	o o o o	$\frac{+bc}{+c}\big\vert -b$
Erit quotiens	$+a-b.$	

Divido primùm ac per c, & fit a, scribendum sub linea in quotiente. Jam multiplicato divisore $c-d$ per $+a$, fit productum $ac-$

$ac-ad$, subducendum ex dividendo, & relinquitur o. Deinde divido $-bc$ per $+c$, & oritur $-b$, sub linea scribendum in quotiente. Quoniam autem multiplicato divisore $c-d$ per $-b$, fit productum $-bc+bd$, & eo ex reliquo dividendi ablato, remanet nihil; patet divisionem esse ad finem perductam, & quotientem esse $a-b$.

Sic etiam ad dividendum $aa-2ab+bb$

$$\begin{array}{rllll} \text{per } a-b:) & aa & -ab & & \\ & \text{o} & -ab & & \\ & & -ab & +bb & \\ & & \text{o} & \text{o} & \\ \text{fit quotiens} & a & -b. & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} aa & a \\ a & \\ -ab & -b \\ +a & \end{array}$$

Divido primùm aa per a, & oritur a, scribendum sub linea in quotiente. Unde multiplicato divisore $a-b$ per a, & ablato producto $aa-ab$ ex dividendo, scribendum erit reliquum $-ab$ sub linea ducta infra $-2ab$. Deinde divido $-ab$ per $+a$, & fit $-b$, scribendum sub linea in quotiente. Tum ducto divisore $a-b$ in $-b$, fit productum $-ab+bb$, quod sublatum à reliquo dividendi relinquit o. Et erit operatio finita, ac quotiens quæsitus $a-b$.

Eâdem ratione si dividendum sit $aa-bb$ per $a+b$.

$$\begin{array}{lrr|l} \text{Divid.} & aa & -bb & -ab \\ \text{Divis. } a+b\,) & aa & -bb & -ab \\ & \text{o} & \text{o} & \text{o} \\ \text{Quotiens.} & a & -b. & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} aa & a \\ a & \\ -ab & -b \\ +a & \end{array}$$

Incipiendo rursus à primo termino, divido aa per a, & habebitur a, scribendum sub linea in quotiente. Unde multiplicato divisore $a+b$ per quotientem inventum a, producetur $aa+ab$, quod sublatum ex dividendo relinquet $-ab$: & quoniam hic terminus præter superstitem $-bb$ ad dividendum huc accessit, ideo post linem ei adscribitur. Deinde divido $-ab$ (nempe id quod modò ad dividendum accessit) per $+a$, & habetur $-b$ in quotiente sub linea scribendum. Quo facto, si multiplicetur divisor $a+b$ per hunc quotientem $-b$, exsurget $-ab-bb$ ad subtrahendum ex eo, quod relinquitur in dividendo: quod cum post subtractio-

nem relinquat o; liquet absolutam esse operationem, & quotientem fore $a - b$.

Nec aliter se res habet si dividatur $a^3 + b^3$ per $a + b$, & incipiatur ab ultimo termino.

$$\begin{array}{lcccc}
\text{Dividend.} & a^3 + b^3 & \vert\, -abb & \vert\, +aab & \\
\text{Divisor } a+b) & +a^3 + b^3 & \vert\, -abb & \vert\, +aab & \\
 & 0 \quad 0 & 0 & 0 & \\
\text{Quotiens} & \multicolumn{3}{l}{+aa - ab + bb.} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
b^3 & bb \\
b & \\
-abb & -ab \\
+b & \\
+aab & +aa \\
+b &
\end{array}$$

Etenim diviso $+b^3$ per $+b$, fit $+bb$, scribendum in quotiente. tum ducto divisore $a + b$ in $+bb$, producitur $+abb + b^3$: Id quod si subtrahatur ex dividendo, relinquetur $-abb$. Deinde diviso $-abb$ per $+b$, oritur $-ab$, scribendum in quotiente, quo multiplicato per divisorem $a + b$ exsurgit $-aab - abb$, ad subtrahendum ex reliquo dividendi, eritque residuum $+aab$. Denique diviso $+aab$ per $+b$, prodibit $+aa$ scribendum in quotiente. unde si multiplicetur divisor $a + b$ per $+aa$, & productum $+a^3 + aab$ auferatur ex residuo dividendi, erit reliquum o. Id quod ostendit, diviso $a^3 + b^3$ per $a + b$, oriri $aa - ab + bb$, quod erat faciendum.

Sequuntur adhuc nonnulla exempla ad uberiorem exercitationem divisionis compositarum.

$$\begin{array}{ll}
\text{Dividend.} & a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \\
\text{Divisor } a - b.) & \qquad\qquad\quad + abb - b^3 \\
 & \qquad\qquad\quad +2abb \quad 0 \\
 & \qquad -2aab + 2abb \\
 & \qquad -aab \quad\; 0 \\
 & a^3 - aab \\
 & 0 \quad\; 0 \\
\text{Quotiens} & +aa - 2ab + bb.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-b^3 & +bb \\
-b & \\
+2abb & -2ab \\
-b & \\
-aab & +aa \\
-b &
\end{array}$$

Divi-

Dividend. $9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4 \mid -3ddee$ $\quad -e^4 \mid +ee$ $\quad -ee$

Divis. $3dd - ee)$ $9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4 \mid -3ddee$ $\quad -3ddee \mid +3dd.$

o o o o o $\quad -ee$

Quotiens $+4de + 3dd + ee$ $\quad -4de^3 \mid +4de.$ $\quad -ee$

Dividend. $\frac{13}{12}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5 \mid -\frac{1}{3}a^3bb$ $\quad -a^5 \mid +2a^3.$

Divis. $\frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}aa)$ $+\frac{4}{3}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5 \mid -\frac{1}{3}a^3bb$ $\quad -\frac{1}{2}aa$

$-\frac{1}{4}a^4b$ o o o $\quad -\frac{1}{4}a^4b \mid +\frac{1}{2}aab.$

$-\frac{1}{4}a^4b$ $\quad -\frac{1}{2}aa$

o $\quad -\frac{1}{3}a^3bb \mid +\frac{2}{3}abb$

Quotiens $+\frac{2}{3}abb + \frac{1}{2}aab + 2a^3.$ $\quad -\frac{1}{2}aa$

Divid. $d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \mid -bd^3 \mid +bbdd \mid -b^3d \mid -aabd$ Pag. 340.

Div. $d+b)$ $d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \mid -bd^3 \mid +bbdd \mid -b^3d \mid -aabd$ lin. 4.

o o o o o o o o o o

Quotiens $+d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab.$

$\frac{d^4}{d} \mid d^3.$ $\quad \frac{-bd^3}{+d} \mid -bdd.$ $\quad \frac{+bbdd}{+d} \mid +bbd.$ $\quad \frac{-b^3d}{+d} \mid -b^3.$

$\frac{+2aady}{+d} \mid +2aay.$ $\quad \frac{+aadd}{+d} \mid +aad.$ $\quad \frac{-aabd}{+d} \mid aab.$

Dividend. $+y^6 - 8y^4 - 124yy - 64$ $\quad -64 \mid +4.$ Pag. 77.

Divisor $yy - 16)$ $+y^6 + 8y^4 + 4yy - 64$ $\quad -16$

$o - 16y^4 - 128yy$ o $\quad -128yy \mid +8yy.$

$-16y^4 - 128yy$ $\quad -16$

o o $\quad -16y^4 \mid +1y^4.$

Quotiens $+1y^4 + 8yy + 4.$ $\quad -16.$

Divi-

Pag. 78.

$$\begin{array}{lll}
\text{Dividend.} & +y^6+aay^4-2ccy^4-a^4yy+c^4yy-a^6-2a^4cc-aac^4 & +2aaccyy \\
\text{Div. } yy-aa-cc) & +y^6-aay^4-ccy^4-2a^4yy+c^4yy-a^6-a^4cc-aac^4 & +aaccyy \\
 & 0+2aay^4-ccy^4+a^4yy\quad 0\quad 0-a^4cc\quad 0 & +aaccyy \\
 & +2aay^4-ccy^4+a^4yy\qquad -a^4cc & +aaccyy \\
 & 0\quad 0\quad 0\qquad 0 & 0
\end{array}$$

$$\text{Quotiens}\quad +y^4+2aayy-ccyy+a^4+aacc.$$

$$\frac{+y^6}{+yy}\Big| +y^4.\ \frac{+2aay^4}{+yy}\Big| +2aayy.\ \frac{-ccy^4}{+yy}\Big| -ccyy.$$

$$\frac{+a^4yy}{+yy}\Big| +a^4.\ \frac{+aaccyy}{+yy}\Big| +aacc.$$

Pag. 380. Ann. 15.

$$\begin{array}{lll}
\text{Dividend.} & +\tfrac{1}{4}q-\tfrac{1}{4}fq+f^3uuq-fuuq-4f^4u^4q+4f^3u^4q & +ffuuq \\
\text{Div. } \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}f-ffuu+f^3uu) & \tfrac{1}{4}q-\tfrac{1}{4}fq+f^3uuq-fuuq-4f^4u^4q+4f^3u^4q & +ffuuq \\
 & 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0 & 0
\end{array}$$

$$\text{Quotiens}\quad +q-4fuuq.$$

$$\frac{+\tfrac{1}{4}q}{+\tfrac{1}{4}}\Big| +q.\qquad \frac{-fuuq}{+\tfrac{1}{4}}\Big| -4fuuq.$$

Quòd si quantitates dividendæ occurrant, quæ præcedenti modo dividi nequeunt, subscribendus erit divisor ipsi dividendo, interjectâ lineolâ, sicut in fractionibus vulgaribus. Ut ad dividendum $ad-ae$ per $d+e$, scribo pro quotiente $\frac{ad-ae}{d+e}$. quo indicatur $ad-ae$ divisum esse per $d+e$, vel adhuc esse dividendum. Sic & si $bb+bd+cc$ dividatur per $b+d$, fit quotiens seu fractio $\frac{bb+bd+cc}{b+d}$, hoc est, $b+\frac{cc}{b+d}$. Quippe sæpe conducit, ut in Arithmetica vulgari, divisionem, quantùm fieri potest, instituere, & quod superest instar fractionis quotienti adscribere. Et tantum de divisione.

De extractione radicis.

QUoniam autem de Radicis Extractione, quæ pro divisionis specie haberi potest, agendum restat, sciendum est, ejus operationem non esse diversam ab illa, quâ in Arithmetica vulgari radix ex dato aliquo numero elicitur.

Etenim

Etenim ut a multiplicatum per a facit aa, seu a quadratum, cujus radix seu latus dicitur a; sic & radice quadratâ extractâ ex aa proveniet rursus a. Similiter cum aa, hoc est, a quadratum multiplicatum per a producat a^3 seu cubum ex a; ita etiam extractâ radice cubicâ ex a^3, fiet a. Et sic de cæteris radicibus.

Nec aliter fit si ex quantitatibus compositis radix sit extrahenda. Sicut enim ex quantitatibus simplicibus radicis extractio non secus se habet atque extractio radicis ex aliquo numero, quæ tantùm unius sit characteris: ita radix, quantitas existens composita, non aliter extrahetur, ac si ex aliquo numero radix, quæ pluribus constet characteribus, eliceretur.

Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $aa+2ab+bb$: extraho primùm radicem ex aa, & fit a, quæ in se multiplicata & ab aa ablata relinquit o. Deinde multiplicato a per 2, divido $+2ab$

$$\begin{array}{ll} \text{Quadratum} & aa+2ab+bb \\ & \underline{aa}+\underline{2ab}+\underline{bb} \\ & 0 \quad\; 0 \quad\; 0 \\ \text{Radix} & a+b \\ \text{Divisor} & 2a \end{array}$$

per $2a$, & fit $+b$: quod adscribo priori radici inventæ a. Hinc si ducatur $2a$ in b, fit $+2ab$, quod sublatum ex $2ab$ relinquit o. Similiter si multiplicetur b in se, fiet $+bb$; quâ itidem ex $+bb$ ablatâ, remanebit o. Et operatio erit ad finem perducta, eritque radix quæsita $a+b$. Et sic de aliis.

Exempla extractionis radicum ex compositis.

$$\begin{array}{ll} \text{Quadratum} & a^4-2aabb+b^4 \\ \text{Radix} & aa-bb \\ \text{Divisor} & 2aa \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Quadratum} & 64xx-160x+100 \\ \text{Radix} & 8x-10 \\ \text{Divisor} & 16x \end{array}$$

Quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$
$aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$
o o o o o o

Radix $a+c-b$
Primus divisor $2a$
Secundus divisor $2a+2c$

Quadratum aa $a+c$
Radix a per 2
$2a+2c$. secundus divisor.

a a
per 2 a $-2ab$ | $-b$ quot. secundus.
Primus divisor $2a$ aa $+2a$ |

$+2ac$ | $+c$ quotus primus. $2a+2c$
$+2a$ | $-b$
$-2ab-2bc$.|

$2a$ c $-b$
$+c$ c $-b$
$+2ac$ cc. $+bb$

Cubus $a^3+3aab+3abb+b^3$
Radix $a+b$ $+3aab$ | $+b$.
Divisor $3aa$ $+3aa$ |

Cub. $27x^6-54x^5+171x^4-188x^3+285xx-150x+125$ Cub. $27x^6$
$27x^6-54x^5+36x^4-8x^3+60xx-150x+125$ Rad. $3xx$.
o o $+135x^4-180x^3+225xx$ o o $3xx$
$+135x^4-180x^3+225xx$ $3xx$
o o o. $9x^4$.

Radix $3xx-2x+5$. per 3
Primus divis. $27x^4$ $-54x^5$ | $27x^4$. 1. div.
Secundus divisor $27x^4-36x^3+12xx$ $+27x^4$ | $-2x$ quot. primus.

$-2x$.

	$-2x$	$-2x$	$3xx-2x$	
$+27x^4$	$-2x$	$-2x$	$3xx-2x$	
$-2x$	$+4xx$	$+4xx$	$-6x^3+4xx$	
$-54x^5$	$+3xx$	$-2x$	$9x^4-6x^3$	
	$+12x^4$	$-8x^3$	$9x^4-12x^3+4xx$	
	per 3		per 3	
	$+36x^4.$		$27x^4-36x^3+12xx.$ Secund. div.	
			$+5$	$+5$
$+135x^4$	$+5$ quotus secund.		$+5$	$+5$
$+27x^4$			$+25$	$+25$
			$+3xx-2x$	$+5$
$+27x^4-36x^3+12xx$			$+75xx-50x$	$+125.$
$+5$			per 3	
$+135x^4-180x^3+60xx.$			$+225xx-150x.$	

Cæterùm si quantitates, ex quibus radix extrahi debet, tales fuerint, ut radix prædicto modo inveniri non possit, designabitur ipsa præfigendo quantitatibus propositis signum $\surd$. Ut ad extrahendum radicem quadratam ex aq, scribo $\surd aq$; quo indicatur radicem quadratam ex aq esse extractam, vel adhuc esse extrahendam. Sic & $\surd \overline{aa+bb}$ designabit radicem quadratam ex $aa+bb$.

Similiter ad extrahendum radicem cubicam ex aaq, scribo $\surd C. aaq$. Ut & $\surd C. \overline{a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem cubicam ex a^3-b^3+abb. Quæ quidem radices vocantur quantitates Surdæ seu Irrationales, ad modum numerorum surdorum seu irrationalium, de quibus Arithmetici agunt.

Ubi notandum, signum $\surd$, vocari Signum Radicale, atque in genere usurpari ad denotandam quamcunque radicem, sive Quadratam, sive Cubicam, sive Quadrato-quadratam, &c; sed ad illam distinguendam, communiter scribi $\surd Q$, vel etiam simpliciter $\surd$, ad denotandam radicem Quadratam: & $\surd C$, ad denotandam radicem Cubicam: & $\surd QQ$ seu $\surd\surd$, ad denotandam radicem Quadrato-quadratam, &c quæ radices etiam sic designantur: $\surd(2)$, $\surd(3)$, $\surd(4)$, &c: atque ab aliis, hoc quoque pacto: $\surd 3$, $\surd cc$, $\surd ss$, &c.

De logistica fractionum.

Quandoquidem ex divisione quantitatum simplicium & compositarum ostensum est oriri Fractiones, sicut in Arithmetica vulgari, quarum operatio easdem leges sequitur atque numerorum fractorum vulgarium; satis erit, si suppositis horum regulis, illarum operationem exemplis exponamus.

Hinc, cum per fractionem quamlibet designetur semper divisionem aliquam esse faciendam, utpote illarum quantitatum, quæ numeratoris vicem gerunt, per quantitates, quæ pro denominatore habentur; facile constat, si numerator denominatori fuerit æqualis, tunc per fractionem illam designari unitatem. Ut $\frac{bb}{bb}$, $\frac{ab+bb}{ab+bb}$, & similes. Unde patet, quânam ratione unitas denotari possit in formam fractionis, cujus denominator sit is, qui requiritur.

Quòd si verò ab, $aa-bb$, &c. in formam fractionis designare velimus, oportet tantùm, assumpto ab & $aa-bb$, &c. tanquam numeratore fractionis, subscribere pro denominatore unitatem, hoc pacto: $\frac{ab}{1}$ & $\frac{aa-bb}{1}$, &c.

Porrò si quantitas aliqua, ut a, designanda sit in formam fractionis, cujus denominator ea sit, quæ præscribitur, ut d, aut $a+b$, &c; oportet, multiplicato a per d, aut per $a+b$, scribere $\frac{ad}{d}$, aut $\frac{aa+ab}{a+b}$, &c.

Non aliter fit, si $a+\frac{aa}{d}$ sit redigendum ad formam unius fractionis. Etenim, multiplicato a per denominatorem d, addatur producto ad numerator aa, & summæ $ad+aa$ subscribatur denominator d, habebiturque $\frac{ad+aa}{d}$. Sic &, $\frac{aa}{d}-a$ in formam unius fractionis reductum, facit $\frac{aa-ad}{d}$. Haud secus si $a+b$ $\frac{+aa+bb}{a-b}$ reducatur ad fractionem, fiet $\frac{2aa}{a-b}$.

Cæterùm notandum hic, cum ad dividendum aa per bb, scribatur $\frac{aa}{bb}$ pro quotiente; ideo ad hunc quotientem sive fractionem $\frac{aa}{bb}$ multiplicandum per divisorem seu denominatorem bb, pro-

pro-

producto scribendum esse numeratorem aa. Non secus si $\frac{bb}{a-b}$ multiplicetur per $a-b$, productum erit bb. Unde patet ad multiplicandum $\frac{a}{2b}$ per $2ab$; quoniam multiplicato $\frac{a}{2b}$ per $2b$, productum est a; superest tantùm ut hoc productum adhuc multiplicetur per a, ut habeatur quæsitum productum aa. Similiter ad multiplicandum $\frac{1}{2}$ per $2ab$: cum multiplicato $\frac{1}{2}$ per 2, fiat 1; hinc multiplicandum tantùm restat 1 per ab, & fit productum quæsitum $1ab$ seu ab. Et sic de aliis.

De Reductione fractionum ad simpliciores.

JAm ad reducendum fractionem $\frac{aac}{cd}$ ad simpliciorem; elisâ communi literâ c, quæ tam in numeratore quàm in denominatore reperitur, fiet $\frac{aa}{d}$. Sic & ad abbreviandum $\frac{ab^3}{abc}$: elisis literis a, b, numeratoris atque denominatoris, hoc est, diviso tam ab^3 quàm abc per ab; fiet $\frac{bb}{c}$.

Eodem modo ad abbreviandum $\frac{aac-aad}{cd-dd}$: quoniam diviso aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; hinc $\frac{aac-aad}{cd-dd}$ ad minores terminos reductum, facit $\frac{aa}{d}$.

Pari ratione ad reducendum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$: quia (ut supra) diviso aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; & rursus $-bbc$ diviso per cd, oritur $-\frac{bb}{d}$, quod per $cd-dd$ multiplicatum producit $-bbc+bbd$; hinc $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$ abbreviatum, facit $\frac{aa-bb}{d}$. Sic & $\frac{a^6ccoomm+4a^6ccm^3p}{oopp z^4+4mp^3z^4}$ abbreviatum, facit $\frac{a^6ccmm}{ppz^4}$. Pag. 214. lin. 15.

Non secus $\frac{aac-aad-acd+add}{cd-dd}$ reducitur ad $\frac{aa}{d}-a$, vel

$\frac{aa-ad}{d}$. Nam $aac-aad$ divisum per $cd-dd$, facit $\frac{aa}{d}$; & $-acd+add$ divisum per $cd-dd$, facit $-a$.

Similiter si fuerit $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$: divido a^3-abb per $aa+2ab+bb$, & relinquitur post divisionem $+2abb+2b^3$ (nullâ hîc quotientis $a-2b$ habitâ ratione). Deinde divido $aa+2ab+bb$ per reliquum $+2abb+2b^3$, & fit quotiens $\frac{a}{2bb}+\frac{1}{2b}$. Hinc cum peracta sit divisio, & nihil remaneat, dividendus erit numerator a^3-abb & denominator $aa+2ab+bb$ per $2abb+2b^3$, Invenieturque $\frac{aa}{2bb}-\frac{a}{2b}$, pro numeratore,

& $\frac{a}{2bb}+\frac{1}{2b}$, pro denominatore,

hoc est, multiplicando ubique per $2bb$, habebitur $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Nec aliter fit ad abbreviandum $\frac{a^3-b^3}{aa-bb}$. Divisis enim a^3-b^3 per $aa-bb$, relinquitur $abb-b^3$: dein $aa-bb$ per $abb-b^3$, fit quotiens $\frac{a}{bb}+\frac{1}{b}$, & peracta est divisio absque reliquo. Quare si dividatur a^3-b^3 & $aa-bb$ per $abb-b^3$,

fiet $\frac{aa}{bb}+\frac{a}{b}+1$, pro numeratore.

& $\frac{a}{bb}+\frac{1}{b}$, pro denominatore.

Ideoque si ubique multiplicetur per bb, fiet fractio reducta $\frac{aa+ab+bb}{a+b}$.

Simili operatione reducitur $\frac{a^4-b^4}{aa+ab}$ ad $\frac{a^3-aab+aab-b^3}{a}$: Ut & $\frac{x^3-25x}{xx+10x+25}$ ad $\frac{xx-5x}{x+5}$. Et sic de aliis.

Ostensâ igitur ratione, quâ fractiones ad simpliciores reduci possunt, superest ut explicemus, quo pacto datis duabus aut pluribus quantitatibus, sive simplicibus, sive compositis, inveniatur minima quantitas, quæ per ipsas sine reliquo dividi potest, id quod in sequentibus usum habere patebit. Est autem operatio similis ei, quâ secundùm prop. 36. lib 7. Elementorum Euclidis, datis duobus numeris, minimus invenitur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividitur.

Ut,

Ut, ad inveniendum minimam quantitatem, quæ dividi potest per duas datas aac & cd: constitutis aac & cd in formam fractionis, hoc pacto; $\frac{aac}{cd}$; reduco fractionem hanc ad ejus primitivam, seu simpliciorem $\frac{aa}{d}$. Quibus juxta se positis, hoc modo: $\frac{aac}{cd} \times \frac{aa}{d}$, si multiplicatio instituatur per crucem, procreabitur eadem quantitas ex aac in d, atque ex cd in aa: fiet enim utrobique $aacd$, minima quippe quantitas, quæ sine reliquo dividi potest per aac & cd.

Sic & ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per duas datas $aac - aad$ & $cd - dd$; reduco (ut ante) fractionem $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ ad ejus primitivam $\frac{aa}{d}$: Tum multiplicato $aac - aad$ per d, aut $cd - dd$ per aa, fiet quantitas quæsita $aacd - aadd$, minima scilicet, quæ divisibilis est per $aac - aad$ & $cd - dd$.

Similiter si dentur $a^4 - b^4$ & $aa + ab$: quoniam $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ reducitur ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$, & $a^4 - b^4$ multiplicatum per a facit $a^5 - ab^4$; erit $a^5 - ab^4$ quantitas quæsita.

Eâdem ratione si datæ fuerint $x^3 - 25x$ & $xx + 10x + 25$, erit quæsita quantitas $x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x$. Et sic de cæteris.

Quòd si verò compertum sit aut constet, duas illas datas quantitates ad simpliciores reduci non posse, sed primitivas esse; oportet unam per alteram multiplicare, ad inveniendam quantitatem quæsitam. Ut ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per $aa - ab$ & $a + b$: quoniam $\frac{aa - ab}{a + b}$ ad simpliciores terminos reduci nequit, multiplico $aa - ab$ per $a + b$, (cùm secundùm præcedentia scribendum foret $\frac{aa - ab}{a + b} \times \frac{aa - ab}{a + b}$); & fit quæsita quantitas $a^3 - abb$.

Cæterùm datis tribus aut pluribus quantitatibus, invenietur minima quantitas quæ per ipsas absque reliquo dividi potest, hoc modo: Ut ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per $a^3 - abb$, $aa + 2ab + bb$, & $aa - bb$: quæro primùm, ut ante, minimam quantitatem, quæ dividi potest per

$a^3 -$

$a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$, & fit $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$. quæ cum & dividatur per $aa - bb$, manifeſtum eſt $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$ eſſe quantitatem quæſitam. Sic & ſi datæ fuerint $a^4 - b^4$, $aa + ab$, $a^4 + ab^3$, & $a + b$: inventâ primùm minimâ quantitate $a^5 - ab^4$, quæ dividi poteſt per duas $a^4 - b^4$ & $aa + ab$, (ut ante), quoniam ipſa dividi nequit per tertiam $a^4 + ab^3$: hinc ad $a^5 - ab^4$ & $a^4 + ab^3$ ſimiliter aliam quæro, ut $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$. quæ cum hic etiam diviſibilis ſit per reliquam $a + b$, patet $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$ eſſe quantitatem quæſitam. Et ſic de cæteris.

De Reductione fractionum ad eandem denominationem.

Quibus explicatis, facile eſt oſtendere, quâ ratione fractiones diverſæ denominationis reducantur ad fractiones ejuſdem denominationis. Ut ad reducendum fractiones $\frac{b^3d}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$ ad eandem denominationem: quæro primùm minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per denominatores aac & cd (ut jam eſt oſtenſum), & fit $aacd$: quæ erit denominator communis. Jam ad inveniendum numeratores, dividatur denominator inventus $aacd$ per aac & cd, unumquemque ſcilicet ex denominatoribus datis, & quotientes d & aa multiplicentur per numeratores b^3d & a^3 datarum fractionum, ut habeantur numeratores quæſiti b^3dd & a^5, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^3dd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$.

Similiter ad reducendum $\frac{b^4}{aac - aad}$ & $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$ ad eandem denominationem: invento denominatore communi $aacd - aadd$, minimâ nempe quantitate, quæ dividi poteſt per $aac - aad$ & $cd - dd$, divido $aacd - aadd$ per $aac - aad$ & $cd - dd$, & quotientes d & aa multiplico per numeratores b^4 & $a^3 + b^3$, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^4d}{aacd - aadd}$ & $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$.

Eodem modo ſi $\frac{125}{x^3 - 25x}$ & $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$ reducantur ad eandem denominationem, provenient $\frac{125x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$ & $\frac{x^3 - 30xx + 125x}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non

Non secus $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$ reductæ sub eodem denominatore, facient

$$\frac{a^8 - a^7b + a^6bb}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6},$$

$$\frac{a^8 - 3a^7b + 5a^6bb - 6a^5b^3 + 5a^4b^4 - 3a^3b^5 + aab^6}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6},$$

$$\frac{a^8 - a^7b + a^6bb - a^5b^3 - a^3b^5 + aab^6 - ab^7 + b^8}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6}, \text{ \&}$$

$$\frac{a^8 - a^7b + 2a^6bb - 2a^5b^3 + 2a^4b^4 - 2a^3b^5 + aab^6 - ab^7}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6}.$$

De Additione & Subtractione fractionum.

Additio & Subtractio fractionum eodem modo perficiuntur, atque additio & subtractio numerorum fractorum vulgarium. Etenim si fractiones ejusdem fuerint denominationis, oportet tantùm earum numeratores addere aut subtrahere, & summæ vel reliquo subscribere denominatorem communem. Ut ad addendum $\frac{aa}{c}$ ad $\frac{bb}{c}$ summa erit $\frac{aa + bb}{c}$. Sic & $\frac{2ad}{d+e}$ additum ad $\frac{2ae}{d+e}$, facit $\frac{2ad + 2ae}{d+e}$, seu $2a$. Non secus si addantur $\frac{bd}{b+d}$, $d + \frac{bb}{b+d}$, & $a - \frac{dd}{b+d}$, erit summa $a + \frac{2bd + bb}{b+d}$.

Quòd si fractiones diversæ denominationis fuerint, reducendæ erunt priùs ad eandem denominationem: quo facto, operandum erit ut jam dictum est. Ut ad addendum $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ad $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, fiet summa $\frac{x^3 - 30xx + 250x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non secus si addantur $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$, erit summa $\frac{4a^8 - 6a^7b + 9a^6bb - 9a^5b^3 + 7a^4b^4 - 6a^3b^5 + 3aab^6 - 2ab^7 + b^8}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6}$.

Jam ad subtrahendum $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bb}{c}$, scribo pro differentia $\frac{bb - aa}{c}$.

Eodem modo subductis $\frac{2ae}{d-e}$ à $\frac{2ad}{d-e}$, reliquum erit $\frac{2ad - 2ae}{d-e}$ seu $2a$. Similiter $\frac{bd}{b+d}$ de $d + \frac{bb}{b+d}$ relinquit $\frac{dd + bb}{b+d}$.

Nec aliter fit, si subtrahendum sit $\frac{b^4}{aac - aad}$ de $\frac{a^3 + b^3}{cc - dd}$. Ete-

nim reductis ad eundem denominatorem, si auferatur $\frac{b^4d}{aacd-aadd}$ de $\frac{a^5+aab^3}{aacd-aadd}$, relinquetur $\frac{a^5+aab^3-b^4d}{aacd-aadd}$. Sic & si tollatur $\frac{125}{x^3-25x}$ ex $\frac{x-25}{xx+10x+25}$, remanebit $\frac{x^3-30xx-625}{x^4+5x^3-25xx-125x}$.

Eâdem ratione ad subducendum $\frac{aa-ab}{a+b}$ de a, reductâ quantitate a ad denominatorem $a+b$, demptoque $\frac{aa-ab}{a+b}$ de $\frac{aa+ab}{a+b}$, fiet reliquum $\frac{2ab}{a+b}$. Non secus si subtrahatur $b+\frac{cc}{b+a}$ de $a+b$, relinquetur $a-\frac{cc}{b+a}$.

De Multiplicatione fractionum.

AD multiplicandum $\frac{ab}{c}$ per $\frac{de}{f}$, multiplico numeratorem ab per numeratorem de, ut & denominatorem c per denominatorem f (ad modum fractionum vulgarium), fitque productum $\frac{abde}{cf}$. Sic & $\frac{aa-bb}{c}$ multiplicatum per $\frac{2ab}{b+c}$ producit $\frac{2a^3b-2ab^3}{bc+cc}$.

Ad faciliorem autem operationem non rarò convenit abbreviare quantitates per crucem. Ut ad multiplicandum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{aa+2ab+bb}$ per $\frac{a^3-abb}{cd-dd}$: quoniam $aac-aad-bbc+bbd$ & $cd-dd$ reducuntur ad simpliciores $aa-bb$ & d, ut & a^3-abb & $aa+2ab+bb$ ad $aa-ab$ & $a+b$; hinc loco multiplicandi $aac-aad-bbc+bbd$ per a^3-abb multiplico $aa-bb$ per $aa-ab$; & loco multiplicandi $aa+2ab+bb$ per $cd-dd$ multiplico $a+b$ per d: eritque productum $\frac{a^4-a^3b-aabb+ab^3}{ad+bd}$.

Porrò ad multiplicandum $aa-bb$ per $\frac{aa-ab}{a+b}$: substituto 1 pro denominatore ipsius $aa-bb$, quoniam numerator $aa-bb$ & denominator $a+b$ reduci possunt ad $a-b$ & 1, hinc multiplicatis numeratoribus inter se, ut & denominatoribus, fiet productum $\frac{a^3-2aab+abb}{1}$ seu $a^3-2aab+abb$.

Eâdem ratione cùm multiplicatur $a+\frac{bb}{a-b}$ per $a-2b+\frac{bb}{a}$, hoc est, $\frac{aa-ab+bb}{a-b}$ per $\frac{aa-2ab+bb}{a}$: quoniam $aa-2ab+bb$ &

& $a-b$ reduci possunt ad $a-b$ & 1; hinc multiplicatis $aa-ab+bb$ per $a-b$, & a per 1, provenit $\frac{a^3-2aab+2abb-b^3}{a}$, seu $aa-2ab+2bb-\frac{b^3}{a}$.

Similiter si ad multiplicandum proponatur $\frac{xx-5x}{x+5}$ per $\frac{xx-25}{x}$: reductis $xx-5x$ & x ad $x-5$ & 1, itemque $xx-25$ & $x+5$ ad $x-5$ & 1, multiplico tantùm $x-5$ per $x-5$, & fit productum $xx-10x+25$.

Præterea ad multiplicandum $a+\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$: quoniam a per $a-b$ facit $aa-ab$, & $\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$ facit bb; hinc productum quæsitum erit $aa-ab+bb$. Quâ quoque ratione multiplicabitur $\frac{aa-ab}{a+b}$ per $aa-bb$, & producetur $a^3-2aab+abb$; cum enim $aa-bb$ fiat ex $a+b$ in $a-b$, & $\frac{aa-ab}{a+b}$ multiplicatum per $a+b$ producat $aa-ab$, superest tantùm multiplicandum $aa-ab$ per $a-b$, ut habeatur $a^3-2aab+abb$.

Denique si multiplicandum sit $\frac{a^3-abb}{cd-dd}$ per $c-d$, fiet, divisis $cd-dd$ per $c-d$, productum $\frac{a^3-abb}{d}$.

De Divisione fractionum.

Ad dividendum $\frac{ab^3}{c}$ per $\frac{bb}{c}$: omisso communi denominatore c, divido ab^3 per bb, fietque quotiens ab. Pari ratione si $\frac{a^3-abb}{c-d}$ dividatur per $\frac{aa+2ab+bb}{c-d}$, orietur $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ seu $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Quòd si denominatores fuerint diversi, reductio ad eandem denominationem fiet, si multiplicatio instituatur per crucem, ut in vulgaribus. Ut ad dividendum $\frac{a^3-b^3}{a+b}$ per $\frac{aa-ab+bb}{c}$: quoniam multiplicato prioris numeratore a^3-b^3 per posterioris denominatorem c, & hujus numeratore $aa-ab+bb$ per illius denominatorem $a+b$, fiunt a^3c-b^3c & a^3+b^3; hinc quotiens erit $\frac{a^3c-b^3c}{a^3+b^3}$.

Advertendum autem hic eſt, ad facilitatem operationis, fractionum numeratores, ſicut etiam denominatores non rarò ad ſimpliciores terminos reduci poſſe. Ut ad dividendum $\frac{a^4 - b^4}{aa - 2ab + bb}$ per $\frac{aa + ab}{a - b}$: cum numeratores $a^4 - b^4$ & $aa + ab$ reduci poſſint ad $a^3 - aab + abb - b^3$ & a, & denominatores $aa - 2ab + bb$ & $a - b$ ad $a - b$ & 1; ideo loco multiplicandi $a^4 - b^4$ per $a - b$, multiplico $a^3 - aab + abb - b^3$ per 1, & fit $a^3 - aab + abb - b^3$; & loco multiplicandi $aa + ab$ per $aa - 2ab + bb$ multiplico a per $a - b$, & fit $aa - ab$, unde quotiens diviſionis fit $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ vel $a + \frac{bb}{a}$. Eâdem ratione ſi $\frac{x^4 - 625}{xx - 10x + 25}$ dividatur per $\frac{xx + 5x}{x - 5}$, orietur $\frac{x^3 - 5xx + 25x - 125}{xx - 5x}$ ſive, $x + \frac{25}{x}$. Nam $x^4 - 625$ & $xx + 5x$ reduci poſſunt ad $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & x, quin & $xx - 10x + 25$ & $x - 5$ ad $x - 5$ & 1, unde producta ex multiplicatione per crucem fiunt $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & $xx - 5x$.

Porrò ad dividendum $a^3 - 2aab + abb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: ſubſtituto 1 pro denominatore dividendi $a^3 - 2aab + abb$, quoniam numeratores $a^3 - 2aab + abb$ & $aa - ab$ reduci poſſunt ad $a - b$ & 1; hinc multiplicatis $a - b$ per $a + b$ & 1 per 1, fiet quotiens $aa - bb$.

Sic & ad dividendum $aa + \frac{3abb}{a + 4b}$ per $a + b$, hoc eſt, $\frac{a^3 + 4aab + 3abb}{a + 4b}$ per $\frac{a + b}{1}$: divido $a^3 + 4aab + 3abb$ per $a + b$, & fit $aa + 3ab$, unde quotiens quæſitus fit $\frac{aa + 3ab}{a + 4b}$. Haud aliter, ſi dividatur $aa - ab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $a + b$. Et $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $xx + 5x$, orietur $\frac{1}{x - 5}$. Ac $a^3 - aab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $aa + ab$. Et denique $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $x + 5$, exſurget $\frac{x}{x - 5}$.

De Radicum extractione ex fractionibus.

Cum in Radicum extractione ex fractionibus radix ex numeratore & denominatore extracta exhibeat radicem quæſitam: hinc ſi extrahenda ſit radix quadrata ex $\frac{aabb}{cc}$, quoniam radix

dix quadrata ex $aabb$ est ab, & radix quadrata ex cc est c, scribo pro radice quæsita $\frac{ab}{c}$.

Eodem modo, si extrahatur radix quadrata ex $\frac{a4-2aabb+b4}{aa+4ab+4bb}$, fiet $\frac{aa-bb}{a+2b}$. Pari ratione ad extrahendam radicem quadratam ex $4+\frac{64xx-160x}{25}$: quoniam $4+\frac{64xx-160x}{25}$ in formam fractionis facit $\frac{100-160x+64xx}{25}$, & radix quadrata ex $100-160x+64xx$ est $10-8x$, & radix quadrata ex 25 est 5; erit radix quæsita $\frac{10-8x}{5}$ seu $2-\frac{8x}{5}$.

Non secus radix cubica ex
$\frac{27x6-54x5+171x4-188x3+285xx-150x+125}{x3-9xx+27x-27}$ erit $\frac{3xx-2x+5}{x-3}$.

Quòd si quæsita radix prædicto modo ex numeratore atque denominatore extrahi nequit, præponitur datæ fractioni signum radicale $\surd$. Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $\frac{ccxx}{4bb}-ac$, scribo $\surd\overline{\frac{ccxx}{4bb}-ac}$; vel quia $\frac{ccxx}{4bb}-ac$ in formam fractionis facit $\frac{ccxx-4abbc}{4bb}$, & ex denominatore $4bb$ extrahi potest radix, quæ est $2b$: ideo quæsita radix sic quoque scribi poterit $\frac{\surd ccxx-4abbc}{2b}$. Similiter radix quadrata ex $\frac{aabb}{aa+bb}$, erit $\frac{ab}{\surd aa+bb}$. Idem de reliquis radicibus est intelligendum.

De LOGISTICA QUANTITATUM SURDARUM.

QUemadmodum fractiones oriuntur ex divisione imperfecta quantitatum, quarum una per alteram sine reliquo dividi nequit: ita ex extractione radicis quantitatum radicem non habentium exsurgunt quantitates Surdæ, quarum operationem sequentibus exemplis exponere visum fuit.

De Reductione quantitatum surdarum.

SCiendum itaque, quòd, sicut ad operationem fractionum diversæ denominationis oportet prius ipsas ad eundem denomi-

 nato-

natorem reducere, ita & opùs sit, quantitates surdas, si diversa signa radicalia habuerint, reducere ad idem signum radicale. Quod fit, si ad numeros, à quibus radices denominantur, minimus inveniatur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividi possit. Ut ad reducendum $\sqrt{aq}$ seu $\sqrt{②}\,aq$ & $\sqrt{C.\,aaq}$ seu $\sqrt{③}\,aaq$ ad idem signum radicale: quæro ad 2 & 3 (numeros à quibus $\sqrt{Q}$ & $\sqrt{C}$ denominantur) minimum numerum, qui per ipsos sine reliquo dividi potest, qui est 6. Jam cum 6 diviso per 2 oriatur 3, & per 3 diviso oriatur 2; hinc aq multiplicandum erit in se cubicè, & aaq quadratè; fientque sub eodem signo $\sqrt{QC.\,a^3q^3}$ seu $\sqrt{⑥}\,a^3q^3$, & $\sqrt{QC.\,a^4qq}$ seu $\sqrt{⑥}\,a^4qq$. Sic & $\sqrt{ab}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$ sub eodem signo radicali erunt $\sqrt{\sqrt{aabb}}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$.

Huc refer cùm quantitas aliqua rationalis per multiplicationem in se reducitur ad aliquod signum radicale. Exempli gratiâ, ad reducendum $a+b$ ad idem signum radicis cum $\sqrt{aa+bb}$: oportet multiplicare $a+b$ in se quadratè, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$. Non secus si multiplicetur $a+b$ in se cubicè, fiet $\sqrt{C.\,a^3+3aab+3abb+b^3}$ sub eodem signo cum $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$. Et sic de aliis.

Deinde sciendum, quantitates surdas non rarò ad simpliciores reduci posse, tollendo ex signo radicali quicquid est rationale: nimirum, dividendo quantitates sub eodem signo $\sqrt{}$ comprehensas per aliquod Quadratum, vel Cubum, &c. per quod multiplicatione fuerint productæ. Ut $\sqrt{75aa}$ reduci potest ad $5a\sqrt{3}$: nam $75aa$ producitur ex multiplicatione $25aa$ per 3, quarum radices sunt $5a$ & $\sqrt{3}$; adeò ut, si $75aa$ dividatur per quadratum $25aa$, sub signo radicali tantùm scribendum sit 3, hoc modo: $5a\sqrt{3}$. Id quod monstrat $5a$, hoc est, $\sqrt{25aa}$, multiplicatum esse per $\sqrt{3}$.

Eodem modo cum $a^3b+aabb$ dividi possit per quadratum aa, & oriatur $ab+bb$; fit ut pro $\sqrt{a^3b+aabb}$ scribi queat $a\sqrt{ab+bb}$.

Similiter quoniam $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$ dividi potest per quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$, cujus radix est $a+c-b$, & quotiens est $ab+bb$; hinc

hinc loco $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ scribi potest $a + c - b\sqrt{ab + bb}$.

Non secus pro $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ scribi poterit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$: reducto enim ultimo termino ad eandem denominationem cum priori, potest utriusque numerator dividi per $aamm$, cujus radix est am, oriturque $oo + 4mp$. Denominator autem cum sit rationalis, liberabitur à signo $\sqrt{}$, extrahendo radicem ex $ppzz$. *Pag. 31, lin. 9.*

Eâdem ratione loco

$\sqrt{C.\ x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 15x^3 - 108xx + 324x - 324}$

scribi potest $x - 3\sqrt{C.\ x^3 + 12}$. Et sic de aliis.

Verùm enimverò quoniam sæpenumero difficile est invenire Quadratum, Cubum, &c. per quod divisio, ad hanc reductionem necessaria, institui possit; non inutile fuerit, si hoc loco ostendamus, quâ ratione datarum quarumlibet quantitatum divisores omnes inveniantur, perinde atque in numeris est ostensum. Vide p. 300.

Ratio inveniendi divisores omnes quarumcunque datarum quantitatum.

Dividantur datæ quantitates per quantitatem aliquam primitivam (hoc est, quæ non nisi per unitatem aut se ipsam dividi potest), & rursus quotiens per hanc eandem sive aliam primitivam, idque fiat donec perveniatur ad quantitatem aliquam primitivam, quæ per se ipsam est dividenda. Ut ad inveniendum divisores omnes quantitatis $a^3b + aabb$: divido $a^3b + aabb$ per a, & fit $aab + abb$, id quod rursus per a divisum dat $ab + bb$. Jam quia quotiens hic per a ampliùs dividi nequit, divido $ab + bb$ per b, & provenit $a + b$, quæ quantitas est primitiva, ideoque per se ipsam dividenda. Quibus peractis reserventur divisores a, a, b, & $a + b$.

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} a^3b + aabb & aab + abb & ab + bb & a + b & 1 \\ a & a & b & a + b & \end{array}$$

Jam ut ex hisce divisoribus inveniantur divisores omnes quantitatis $a^3b + aabb$, multiplico primùm a per a, & fit aa. Deinde b per 1, a, & aa, fiuntque b, ab, & aab. Denique multiplico $a + b$ per 1, a, aa, b, ab, & aab, & fiunt $a + b$, $aa + ab$, $a^3 + aab$, $ab + bb$, $aab + abb$, & $a^3b + aabb$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline a. \quad a. \\ \hline aa. \\ \hline b. \quad ab. \quad aab. \\ \hline a+b.\ aa+ab.\ a^3+aab.\ ab+bb.\ aab+abb.\ a^3b+aabb. \end{array}$$

Atque ita divisores omnes erunt 1, a, aa, b, ab, aab, $a+b$, $aa+ab$, a^3+aab, $ab+bb$, $aab+abb$, & $a^3b+aabb$.

Sic & ad inveniendum omnes divisores quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: divido $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$ per quantitatem primitivam $aa+bb$, & fit $a^4-3aabb+b^4$, id quod rursus divisum per quantitatem primitivam $aa+ab-bb$ dat $aa-ab-bb$, quæ quantitas etiam primitiva est, adeoque per se ipsam dividenda. Eruntque divisores reservandi $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $aa-ab-bb$.

$$\begin{array}{r|r|r|l} a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6 & a^4-3aabb+b^4 & aa-ab-bb & 1 \\ aa+bb & aa+ab-bb & aa-ab-bb & \end{array}$$

Ex quibus ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: multiplico primùm $aa+bb$ per $aa+ab-bb$, & fit $a^4+a^3b+ab^3-b^4$. Deinde 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $a^4+a^3b+ab^3-b^4$ per $aa-ab-bb$, fiuntque $aa-ab-bb$, $a^4-a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline aa+bb. \quad aa+ab-bb. \\ \hline a^4+a^3b+ab^3-b^4. \\ \hline aa-ab-bb.\ a^4-a^3b-ab^3-b^4.\ a^4-3aabb+b^4.\ a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6. \end{array}$$

Ita ut divisores omnes sint 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, $a^4+a^3b+ab^3-b^4$, $aa-ab-bb$, $a^4-a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

Pag. 72. Lin. 12.

Eodem modo ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: divido $a^6+2a^4cc+aac^4$ per a, & fit $a^5+2a^3cc+ac^4$, quod rursus per a divisum, dat $a^4+2aacc+c^4$. Jam cum hic quotiens dividi ampliùs non possit per a aut c similemve quantitatem, divido $a^4+2aacc+c^4$ per $aa+cc$, vel, quod hic idem est, ex $a^4+2aacc+c^4$ extraho radicem quadratam

dratam $aa+cc$, quâ denuo per ſeipſam diviſâ, provenit 1. Unde cum diviſores reſervati ſint a, a, $aa+cc$, & $aa+cc$; ideo ut ex iis inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: multiplico primùm a per a, & fit aa: deinde 1, a, & aa per $aa+cc$, fiuntque $aa+cc$, a^3+acc, & a^4+aacc: ac denique $aa+cc$, a^3+acc, & a^4+aacc per $aa+cc$, & fiunt $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$, & $a^6+2a^4cc+aac^4$; eruntque diviſores omnes 1, a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, a^4+aacc, $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$, & $a^6+2a^4cc+aac^4$.

$$a^6+2a^4cc+aac^4 \,\Big|\, a^5+2a^3cc+ac^4 \,\Big|\, a^4+2aacc+c^4 \,\Big|\, aa+cc \,\Big|\, 1$$
$$a \,\Big|\qquad a \,\Big|\qquad aa+cc \,\Big|\, aa+cc \,\Big|$$

$$1.$$
$$a. \quad a.$$
$$aa.$$
$$aa+cc.\ a^3+acc.\ a^4+aacc.$$

$$aa+cc.\ a^4+2aacc+c^4.\ a^5+2a^3cc+ac^4.\ a^6+2a^4cc+aac^4.$$

Similiter ad inveniendum diviſores omnes quantitatis $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$: quia, factâ diviſione per b, oritur $a^3-aab+2aac+acc-abb+bcc-2bbc+b^3$, & hujus quotientis per $a+b$, oritur $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, & radix quadrata ex $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$ eſt $a+c-b$, hoc eſt, $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$ diviſum per $a+c-b$, dat $a+c-b$; divido demum $a+c-b$ per $a+c-b$, & fit 1. Unde cum diviſores reſervati ſint b, $a+b$, $a+c-b$, & $a+c-b$; multiplico b per $a+b$, & fit $ab+bb$: tum 1, b, $a+b$, & $ab+bb$ per $a+c-b$, fiuntque $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbc-b^3$: ac denique $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbc-b^3$ per $a+c-b$, fiuntque $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, $a^3+2aac+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$, & $a^3b+aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$. Atque ita diviſores omnes erunt 1, b, $a+b$, $ab+bb$, $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, $aab+abc+bbc-b^3$, $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, $a+2aa$

$+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$, & $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$.

Non secus si proponatur a^3bc-ab^3c, invenientur ex divisoribus reservatis $a, b, c, a-b$, & $a+b$ divisores sequentes: $1, a, b, ab, c, ac, bc, abc, a-b, aa-ab, ab-bb, aab-abb, ac+bc, aac-abc, abc-bbc, aabc-abbc, a+b, aa+ab, ab+bb, aab+abb, ac+bc, aac+abc, abc+bbc, aabc+abbc, aa-bb, a^3-abb, aab-b^3, a^3b-ab^3, aac-bbc, a^3c-abbc, aabc-b^3c$, & a^3bc-ab^3c.

Neque prætereundum hoc loco videtur, quo pacto horum divisorum ope duæ pluresve quantitates datæ aliâ ratione, quàm ex superioribus facilè fuit colligere, ad simplicissimos terminos reduci queant. Ut ad reducendum a^3-abb, $aab-b^3$, & $a^3+aab-abb-b^3$ ad terminos simplicissimos, eandem cum ipsis rationem habentes; quæro primò (ut ante) omnes cujusque quantitatis datæ divisores: eruntque ipsius a^3-abb divisores $1, a, a-b, aa-ab, a+b, aa+ab, aa-bb$, & a^3-abb: ipsius autem $aab-b^3$ divisores erunt $1, b, a-b, ab-bb, a+b, ab+bb, aa-bb$, & $aab-b^3$: at verò ipsius $a^3+aab-abb-b^3$ divisores erunt $1, a-b, a+b, aa-bb, aa+2ab+bb$, & $a^3+aab-abb-b^3$. Jam cum inter ipsos tres sint, qui sibi invicem respondeant, ut $a-b$, $a+b$, & $aa-bb$, quorum ope datæ quantitates ad simpliciores reduci possunt; hinc ad inveniendum terminos simplicissimos, divido a^3-abb, $aab-b^3$, & $a^3+aab-abb-b^3$ per $aa-bb$ (utpote divisorem pluribus dimensionibus constantem), fiuntque a, b, & $a+b$. Ubi notandum, quantitates propositas fore inter se primas, si nulli ex divisoribus sibi mutuò respondeant.

Quæ ratio inveniendi divisores non ineptè quoque adhiberi potest ad fractionum abbreviationem. Ut ad abbreviandum

Vide supra pag. 22. $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$: quia tam numerator quam denominator dividi potest per $a+b$, poterit pro $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ scribi $\frac{aa-ab}{a+b}$. Et sic de cæteris.

Inventis autem omnibus divisoribus, videndum est num aliqui ex ipsis sint quadrati, vel cubi, &c. qui si reperiantur, adhiberi poterunt ad prædictum modum liberandi quantitates ex signo radicali

dicali. Ut quia inter divisores quantitatis $a^3b + aabb$ reperitur quadratum aa, poterit $\sqrt{a^3b + aabb}$ dividendo per aa, reduci ad $a\sqrt{ab + bb}$.

Sic & cum $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$ pro divisore habeat quoque quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$, poterit pro $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ scribi $\overline{a + c - b}\sqrt{ab + bb}$. Similiter cum numerus 75 inter divisores quoque habeat quadratum numerum 25, reduci poterit $\sqrt{75aa}$ ad $5a\sqrt{3}$. Ita &, quia 1200 dividi potest per numeros quadratos 4, 16, 25, 100, & 400; poterit pro $\sqrt{1200aabb}$ scribi $2ab\sqrt{300}$, vel $4ab\sqrt{75}$, vel $5ab\sqrt{48}$, vel $10ab\sqrt{12}$, vel denique $20ab\sqrt{3}$.

Quòd si inter divisores præter unitatem quadratum nullum aut cubus &c. reperiatur, non poterit data quantitas præcedenti modo reduci, nisi velis eam in formam fractionis designare. Ut quia 10 præter unitatem quadratum nullum inter divisores admittit, poterit $\sqrt{10aa}$, dividendo 10 per aliquod quadratum, ut lubet, ut 4, 25, 100, &c. denotari hoc pacto: $2a\sqrt{\frac{5}{2}}$, vel $5a\sqrt{\frac{2}{5}}$, vel $10a\sqrt{\frac{1}{10}}$, &c.

Sciendum denique, quòd, licèt hæ quantitates omnes per se consideratæ surdæ existant, tamen inter se collatæ duorum sint generum: aliæ enim dicuntur Commensurabiles seu Communicantes; aliæ verò Incommensurabiles seu non-Communicantes.

Communicantes sunt, quæ affinitatem habentes cum quantitatibus rationalibus, aut etiam numeris, inter se sunt ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, seu sicut numerus ad numerum.

Non-Communicantes verò sunt, quarum unius ad alteram relatio non est ut quantitatis rationalis ad quantitatem rationalem, aut numeri ad numerum.

Ratio autem dignoscendi communicantes à non-communicantibus est, si, postquam ad simplicissimos terminos sunt reductæ, reperiantur inter se esse ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, aut numerus ad numerum. Ut $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ sunt communicantes, quia divisione per $\sqrt{3}$, maximum earum com-

munem divisorem, reducuntur ad $\sqrt{25aa}$ & $\sqrt{9aa}$, hoc est, ad $5a$ & $3a$: adeò ut pro $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ scribi possit $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, quæ inter se sunt ut $5a$ ad $3a$, vel 5 ad 3.

Eodem modo communicantes erunt $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, quia utrâque divisâ per $aa+bb$, oriuntur $\sqrt{aa}$ & $\sqrt{bb}$, seu a & b: ideoque reducuntur ad $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$, quæ inter se sunt ut a ad b.

Pag. 31. Similiter communicantes sunt $\sqrt{-\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$: quippe reducuntur ad $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, quarum unius ad alteram ratio est, ut $\frac{z}{a}$ ad $\frac{am}{pz}$, seu pzz ad aam.

Haud aliter communicantes erunt $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$: reductæ enim ad $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, habent inter se eam rationem, quæ est ipsius $x+3$ ad $5-x$. Et sic de aliis.

De Additione & Subtractione quantitatum surdarum.

AD addendum vel subtrahendum quantitates surdas, oportet primùm explorare utrum sint communicantes nec ne: si enim communicantes fuerint, adduntur tantùm vel subtrahuntur quantitates vel numeri, qui extra signum radicale reperiuntur. Ut ad addendum $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, scribo, additis $5a$ & $3a$, pro summa $8a\sqrt{3}$; & $2a\sqrt{3}$, pro earundem differentia, utpote sublatis $3a$ ex $5a$.

Eodem modo si fuerint $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$: addendo & subtrahendo a & b, erit summa $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$, & differentia $\overline{a \div b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter si proponatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$, hoc est, $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, erit summa $\frac{pzz+aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$,

& dif-

& differentia $\frac{pzz \sim aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$. Nec aliter fit, si habeatur $\sqrt{\frac{4aabb-4aaxx}{bb}}$ vel $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$ & $\sqrt{bb-xx}$: erit enim Pag. 173, lin. 18. summa $\frac{2a+b}{b}\sqrt{bb-xx}$, & differentia $\frac{2a \sim b}{b}\sqrt{bb-xx}$. Pari ratione additis $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc est, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, erit summa $8\sqrt{xx+12}$, eisdemque subtractis, erit differentia $2x \sim 2\sqrt{xx+12}$.

Quod si verò non communicantes fuerint, non poterunt addi vel subtrahi ita ut unam radicem constituant, quocirca addendæ vel subtrahendæ sunt mediantibus signis $+$ & $-$. unde Binomia & Multinomia exsurgunt. Ut si addendum sit $\sqrt{aa+bb}$ ad $\sqrt{aa-bb}$, scribo pro summa $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$; & ad subtrahendum $\sqrt{aa-bb}$ de $\sqrt{aa+bb}$, scribo pro reliquo $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$. Non secus si addatur $a+b$ ad $\sqrt{aa+bb}$, erit summa $a+b+\sqrt{aa+bb}$; at si subducatur $\sqrt{aa+bb}$ de $a+b$, erit reliquum $a+b-\sqrt{aa+bb}$. Cum enim $a+b$ sit quantitas rationalis, & $\sqrt{aa+bb}$ quantitas surda, non magis communicantes esse possunt, quàm omnes quantitates surdæ, quæ diversis signis radicalibus designantur. Haud dissimili ratione concludes summam ex $aa+bb+a\sqrt{aa+bb}$ & $aa-bb-b\sqrt{aa+bb}$ esse $2aa+\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$, & differentiam esse $2bb+\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$.

De Multiplicatione quantitatum surdarum.

SI quantitates datæ sunt communicantes, oportet, multiplicatis quantitatibus vel numeris extra signum radicale positis, productum multiplicare per quantitatem vel numerum sub signo radicali contentum, ut habeatur productum quæsitum. Ut ad multiplicandum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, multiplico primùm $5a$ per $3a$, & fit $15aa$: tum $15aa$ per 3, eritque productum quæsitum $45aa$.

Eodem modo ad multiplicandum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: multiplicato a per b, &

 pro-

producto ab per $aa + bb$, fiet productum quæsitum $a^3b + ab^3$. Nec aliter fit si ad multiplicandum proponatur
$\sqrt{x^4 + 6x^3 + 21xx + 72x + 108}$ per
$\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37xx - 120x + 300}$, hoc est, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, per $5 - x\sqrt{xx + 12}$: Multiplicatis enim $x+3$ per $5-x$, fit $15 + 2x - xx$, quod multiplicatum per $xx+12$, productum facit $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$.

Quòd si datæ quantitates non fuerint communicantes, oportet tantùm multiplicare quantitates sub signis radicalibus comprehensas, & producto præfigere commune signum radicale. Si verò signa radicalia diversa fuerint, reducenda priùs sunt ad idem signum, sicut superiùs est ostensum, & deinde operandum, ut jam dictum est. Ut, ad multiplicandum $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$: multiplicatis ab per cd, præfigatur producto $abcd$ signum $\sqrt{}$, & fit productum quæsitum $\sqrt{abcd}$. Sic & ad multiplicandum $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa-bb}$: multiplicatis $aa+bb$ per $aa-bb$, fiet productum $\sqrt{a^4-b^4}$. Similiter si multiplicari debeat $\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, reduco priùs $a+b$ ad idem signum radicale, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$: tum multiplicatis $aa+2ab+bb$ per $aa+bb$, fit productum $\sqrt{a^4+2a^3b+2aabb+2ab^3+b^4}$, vel etiam scribendo hoc pacto: $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Nec aliter fit si multiplicandum sit $a+\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$, hoc est, $a+\sqrt{bc}$ in se: multiplico primùm $a+\sqrt{bc}$ per a, & fit $aa+a\sqrt{bc}$: tum $a+\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$, fitque $a\sqrt{bc}+bc$. quæ producta si addantur, fiet productum quæsitum $aa+bc+2a\sqrt{bc}$. Non secus si multiplicandum proponatur $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$ per $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$: quia multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa+bb}$, & $+\sqrt{aa-bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$ (omissis scilicet tantùm signis radicalibus) fiunt $aa+bb$ & $-aa+bb$; at verò multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$, & $\sqrt{aa+bb}$ per $+\sqrt{aa-bb}$ producta evanescunt: hinc productum quæsitum erit $2bb$.

De Divisione quantitatum surdarum.

SI datæ quantitates sunt communicantes, oportet tantùm dividere quantitates, vel numeros, extra signum radicale positos, &

& quod oritur erit quotiens quæsitus. Ut ad dividendum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$: divido $5a$ per $3a$, seu 5 per 3; eritque quotiens quæsitus $\frac{5}{3}$ seu $1\frac{2}{3}$. Sic & ad dividendum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: divisis a per b, fit quotiens $\frac{a}{b}$. Non secus $\sqrt{abcc}$ seu $c\sqrt{ab}$ divisum per $\sqrt{ab}$, dat c. Et sic de aliis.

Quòd si communicantes non fuerint, dividendæ erunt quantitates sub signis radicalibus comprehensæ, & ei quod oritur præfigendum est commune signum radicale. Ut ad dividendum $\sqrt{a^3b-ab^3}$ per $\sqrt{aa-bb}$: divisis a^3b-ab^3 per $aa-bb$, fit ab; unde quotiens quæsitus erit $\sqrt{ab}$.

Et quidem si signa radicalia fuerint diversa, reducenda priùs erunt ad idem signum, & deinde operatio instituenda erit, ut jam dictum est. Ut ad dividendum a^3+abb per $\sqrt{a^4+aabb}$: multiplicando a^3+abb in se, fit $a^6+2a^4bb+aab^4$; quare divisâ $\sqrt{a^6+2a^4bb+aab^4}$ per $\sqrt{a^4+aabb}$, erit quotiens $\sqrt{aa+bb}$. Sic & si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $a+b$: multiplico primùm $a+b$ in se, ut fiat sub eodem signo radicali $\sqrt{aa+2ab+bb}$, quo facto, si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $\sqrt{aa+2ab+bb}$, fiet quotiens quæsitus $\sqrt{aa-bb}$.

Non aliâ ratione $aa+bb$ divisum per $\sqrt{aa+bb}$, facit $\sqrt{aa+bb}$. quippe diviso quadrato per suum latus, oritur latus. Unde si a^3+abb dividatur per $\sqrt{aa+bb}$, orietur $a\sqrt{aa+bb}$.

Porrò si dividendum sit $a^3+abb+ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, divido primùm a^3+abb per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit ut ante, $\sqrt{aa+bb}$; tum $ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit b, unde quotiens quæsitus erit $\sqrt{aa+bb}+b$. Non secus si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}-aa+bb$ per $a+b$, orietur $\sqrt{aa-bb}-a+b$. Similiter si dividendum proponatur $ab+b\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$: quoniam ab divisâ per a, eadem exoritur quantitas b, quæ provenit dividendo $b\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$: hinc quotiens quæsitus erit b. Eodem modo $aab-bbc-ab+\frac{bbc}{a}\sqrt{bc}$ divisum per $a-\sqrt{bc}$, facit $ab-\frac{bbc}{a}$.

Postea ad dividendum $aa-bc$ per $a+\sqrt{bc}$, divido aa per a,

& fit

& fit a, quod multiplicatum per $\sqrt{bc}$ producit $a\sqrt{bc}$, eritque reliquum dividendi $-a\sqrt{bc}-bc$. diviso jam $-a\sqrt{bc}$ per a, fit $-\sqrt{bc}$, quod multiplicatum per $+\sqrt{bc}$, facit $-bc$: hoc igitur si auferatur à reliquo dividendi $-bc$, relinquetur o, & absoluta erit divisio, eritque quotiens quæsitus $a-\sqrt{bc}$. Eodem modo $ab-cd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$: & $a^3+bc\sqrt{bc}$ divisum per $a+\sqrt{bc}$, dat $aa+bc-a\sqrt{bc}$: & $aabb-ccdd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\overline{ab+cd}\sqrt{ab}+\overline{ab+cd}\sqrt{cd}$: & $a^3b-abbc$ divisum per $aa+a\sqrt{bc}$, dat $ab-b\sqrt{bc}$: ut & $a^3-abc+\overline{aa-bc}\sqrt{bc}$ divisum per $a-\sqrt{bc}$, dat $aa+bc+2a\sqrt{bc}$.

Denique ad dividendum $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$: quia $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$ seu $\sqrt{cc-2cd+dd}$ dividi nequit, scribo pro quotiente $\frac{\sqrt{a4+b4}}{c-d}$, vel $\sqrt{\frac{a4+b4}{cc-2cd+dd}}$, vel etiam hoc pacto: $\frac{1}{c-d}\sqrt{a^4+b^4}$. Eodem modo si dividatur $a\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, fiet quotiens $\frac{a}{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter $aa+bb$ divisum per $\sqrt{aa-bb}$ exhibet quotientem $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa-bb}}$: & $aa+\sqrt{abcd}$ per $a+\sqrt{bc}$, facit $\frac{aa+\sqrt{abcd}}{a+\sqrt{bc}}$. Sic etiam ad dividendum $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ per $8\sqrt{xx+12}$, scribitur pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x3-x4}{8\sqrt{xx+12}}$; vel quia $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ producitur ex $\overline{15+2x-xx}$ in $xx+12$, quadratum nempe ipsius $\sqrt{xx+12}$, fit ut scribi quoque possit $\frac{\overline{15+2x-xx}\text{ in }\overline{xx+12}}{8\sqrt{xx+12}}$, vel breviùs $\frac{15+2x-xx}{8}\sqrt{xx+12}$, utpote dividendo $xx+12$ per $\sqrt{xx+12}$. Non aliter si $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ sit dividendum per $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, scribo pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x3-x4}{\overline{x+3}\sqrt{xx+12}}$ seu $\frac{60-12x+5xx-x3}{\sqrt{xx+12}}$. nam $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ dividi potest per $x+3$, & fit $60-12x+5xx-x^3$; vel quoniam $60-12x+5xx-x^3$ producitur ex $5-x$ in $xx+12$, fit ut etiam scribi possit $\frac{\overline{5-x}\text{ in }\overline{xx+12}}{\sqrt{xx+12}}$ seu $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$.

De Extractione Radicis Quadratæ ex Binomiis.

MOdus, quo ex quantitatibus binomiis radix quadrata extrahitur, non differt ab eo, qui in numeris adhiberi solet ad inventionem radicis quadratæ ex Binomiis, estque talis:

Subductis quadratis partium dati Binomii à se invicem, si radix quadrata reliqui ad partem majorem addatur, & ab eadem auferatur; erunt radices quadratæ ex semisse summæ & differentiæ, per signum + vel − dati Binomii connexæ, binæ partes radicis quæsitæ. *Regula extrahendi radicem quadratam ex Binomiis.*

Ut ad extrahendum radicem quadratam ex $aa+bc+2a\sqrt{bc}$, subtraho $4aabc$, quadratum minoris partis ex $a^4+2aabc+bbcc$ quadrato partis majoris, & relinquitur $a^4-2aabc+bbcc$, cujus radix quadrata $aa-bc$ addita ad majorem partem $aa+bc$, & ab eadem ablata facit summam $2aa$, & differentiam $2bc$, quarum semisses sunt aa & bc: unde radices quadratæ sunt a & $\sqrt{bc}$, quæ si connectantur per signum $+$, erit radix quæsita $a+\sqrt{bc}$.

Sic radix quadrata ex $mm+\frac{pxx}{m}+x\sqrt{4pm}$ erit $m+x\sqrt{\frac{p}{m}}$. *Pag. 182. lin. 13.*

Eodem modo si extrahenda sit radix quadrata ex $\overline{a+b}\sqrt{ab}+{}^2ab$: subducto $4aabb$, quadrato partis minoris, ex $a^3b+2aabb+ab^3$, quadrato majoris partis, erit reliqui $a^3b-2aabb+ab^3$ radix quadrata $\overline{a-b}\sqrt{ab}$. quæ si addatur & auferatur ex majori parte $\overline{a+b}\sqrt{ab}$, fiet summa $2a\sqrt{ab}$, & differentia $2b\sqrt{4b}$, unde semissium radices quadratæ constituunt radicem quæsitam $\sqrt{a\sqrt{ab}}+\sqrt{b\sqrt{ab}}$ seu $\sqrt{\sqrt{a^3b}}+\sqrt{\sqrt{ab^3}}$.

Nec aliter fit cùm extrahitur radix quadrata ex $\overline{a+d}\sqrt{bc}+2\sqrt{abcd}$: etenim subtracto $4abcd$, quadrato minoris partis, ex $aabc+2abcd+bcdd$, quadrato majoris partis, relinquetur $aabc-2abcd+bcdd$, cujus radix quadrata est $\overline{a-d}\sqrt{bc}$: hæc ergo si addatur & subtrahatur ex majori parte $\overline{a+d}\sqrt{bc}$, erit summa $2a\sqrt{bc}$, & differentia $2d\sqrt{bc}$: Ex quarum dimidiis si radices quadratæ extrahantur, fiet radix quæsita $\sqrt{a\sqrt{bc}}+\sqrt{d\sqrt{bc}}$ vel $\sqrt{\sqrt{aabc}}+\sqrt{\sqrt{ddbc}}$.

Quòd si, subductis quadratis partium dati binomii à se invicem, reliqui radix quadrata & major pars binomii communicantes non fuerint: satiùs erit ipsi binomio signum universale radicis quadratæ præfigere. Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ scribo $\sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$. quæ radices vulgò appellantur Universales.

Pag. 6.

De Reductione Æquationum.

QUoniam ad resolvendum aliquod Problema, id ipsum supponendum est ut jam factum, atque nomina imponenda sunt quantitatibus tum datis, tum quæsitis; & quidem pro datis à D. Des-Cartes ordinariè ponuntur priores literæ Alphabeti a, b, c, &c. pro quæsitis autem posteriores z, y, x, &c: fit ut percurrendo Problematis difficultatem, eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ quantitates, nullo inter cognitas & incognitas facto discrimine, à se invicem dependent, tandem inveniatur via quantitatem aliquam duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur. Unde cum æquatio nihil aliud sit, quàm mutua comparatio duarum rerum æqualium, quæ variè denominantur: facilè constat, quantitates hasce cognitas & incognitas, prout diversimode sunt affectæ atque dispositæ, diversas efficere posse Æquationum formulas, quæ tamen per sequentes regulas reduci queunt ad hasce similésve species:

$z \propto b$ aut
$zz \propto -az+bb$, aut
$z^3 \propto +azz+bbz-c^3$, aut
$z^4 \propto +az^3+bbzz-c^3z+d^4$, &c.

De Reductione per Additionem.

UT si habeatur æquatio inter $z-3$ & 12, hoc est, si fuerit $z-3 \propto 12$: quoniam si æqualibus æqualia vel idem addas, ea quæ fiunt sunt æqualia; hinc si utrinque addatur $+3$, fiet $z \propto 15$. nam -3 & $+3$ addita faciunt o.

Sic & si fuerit $z-b \propto o$ addendo utrinque b, fiet $z \propto b$. Aut si ha-

si habeatur $b - z \infty o$, fiet, addendo utrobique z, $b \infty z$. Et si habeatur $zz - aq \infty o$, erit $zz \infty aq$: ut & si $z^3 - aaq$ æquetur o, fiet $z^3 \infty aaq$, &c.

Non secus si habeatur $z^4 - az^3 - bbzz \infty d^4 - c^3z$, addendo utrique parti $+ az^3 + bbzz$, fiet $z^4 \infty az^3 + bbzz - c^3z + d^4$.

Ex quibus constat, quantitates signo — adfectas addi utrique parti, si eximantur ab una parte, & in alteram partem transferantur sub signo +.

De Reductione per Subtractionem.

Deinde si fuerit $z + 3 \infty 12$; quia si ab æqualibus æqualia vel idem auferas, illa quæ relinquuntur sunt æqualia, fit ut, subtrahendo utrinque $+3$, habeatur $z \infty 9$.

Eodem modo si habeatur $zz + az \infty bb$, subtracto utrinque $+az$, fiet $zz \infty - az + bb$.

Similiter $z^3 + 2c^3 \infty azz + bbz + c^3$ reducetur ad $z^3 \infty azz + bbz - c^3$, subtrahendo utrinque $+2c^3$.

Unde colligitur quantitates signo + adfectas ab utraque parte subtrahi, eximendo ipsas ex una parte & transferendo in alteram partem sub signo —: atque adeò quicquid vel additione vel subtractione transfertur, adfici signo contrario.

De Reductione per Multiplicationem.

Porrò si ad reducendum proponatur $\frac{z}{3} \infty 5$: quoniam æqualia per æqualia vel idem multiplicata, producunt æqualia; fiet multiplicando utrinque per 3, $z \infty 15$. Sic & si habeatur $z \infty \frac{aq}{z}$, invenietur, multiplicando utrinque per z, $zz \infty aq$, &c.

Eodem modo si fuerit $\frac{zz}{z-b} \infty a$: quoniam, delendo denominatorem $z - b$ prioris partis $\frac{zz}{z-b}$, ipsa pars multiplicatur per $z - b$; hinc oportet etiam alteram partem a multiplicare per $z - b$, ut habeatur æquatio inter zz & $az - ab$.

Similiter si sit $\frac{zz}{a} \infty \frac{zz - bz + bb}{z}$: quoniam sublato denomina-

tore a partis prioris $\frac{zz}{a}$, multiplicata est pars prior per a, & fit zz; hinc oportet & alteram partem $\frac{zz-bz+bb}{z}$ multiplicare per a, ut habeatur $\frac{azz-abz+abb}{z}$. Unde cum æquatio proposita reducta sit ad $zz \propto \frac{azz-abz+abb}{z}$, si denuo utraque pars multiplicetur per z, denominatorem posterioris partis $\frac{azz-abz+abb}{z}$, fiet $z^3 \propto azz-abz+abb$.

Ex quibus patet, æquationem, cujus utraque pas est fractio, reduci ad aliam, quæ fractione caret, multiplicando per crucem, numeratorem nempe prioris partis per denominatorem posterioris, & numeratorem posterioris partis per denominatorem prioris. Quod idem est ac si binæ partes æquationis ad eandem denominationem reducantur, ipsæque deinde, omittendo communem denominatorem, per eundem multiplicentur.

Ubi notandum, ad majorem abbreviationem atque operationis facilitatem, non rarò tum numeratores, tum denominatores, ante hanc multiplicationem ad simpliciores terminos reduci posse. Ut si fuerit $\frac{z^3}{zz-aa} \propto \frac{az-aa}{z+a}$: reductis denominatoribus $zz-aa$ & $z+a$ ad $z-a$ & 1, fiet $\frac{z^3}{z-a} \propto \frac{az-aa}{1}$, ac proinde, si multiplicetur per crucem, invenietur $z^3 \propto azz-2aaz+a^3$. Similiter si habeatur $\frac{aaz-bbz}{z+b} \propto \frac{a^3-abb}{z}$: reductis numeratoribus $aaz-bbz$ & a^3-abb ad z & a, habebitur $\frac{z}{z+b} \propto \frac{a}{z}$, ubi si per crucem multiplicetur, fiet $zz \propto az+ab$. Non secus si habeatur $\frac{azz-bzz}{bb-bz} \propto \frac{aa-ab}{b}$: cum numeratores $azz-bzz$ & $aa-ab$ reduci possint ad zz & a, ut & denominatores $bb-bz$ & b ad $b-z$ & 1, fiet $\frac{zz}{b-z} \propto \frac{a}{1}$; ideoque multiplicando per crucem, exsurget $zz \propto -az+ab$.

Huc etiam refer, cùm integrum æquatur fractioni. Ut si habeatur æquatio inter $\frac{az^3-bz^3}{zz+az+aa}$ & $ab-bb$: substitutâ enim unitate pro denominatore ipsius integri $ab-bb$, cum az^3-bz^3 & $ab-bb$ reduci possint ad z^3 & b, erit æquatio talis

z^3

$\frac{z^3}{zz+az+aa} \propto \frac{b}{1}$, unde multiplicando per crucem, invenietur æquatio $z^3 \propto bzz + abz + aab$.

Ad hæc si proponatur $\sqrt{z}$ æquari 5: quoniam æqualium æqualia quoque sunt quadrata, cubi, &c; hinc si utraque pars in se multiplicetur quadratè, habebitur $z \propto 25$. Sic & si fuerit $\sqrt{z} \propto \sqrt{5}$: ductâ utrâque parte in se quadratè, fiet $z \propto 5$. Pari ratione si $\sqrt{z}$ æquetur $\sqrt{aab - b}$, erit $z \propto aab - b$. Haud secus si fuerit $\sqrt{C.\, z} \propto \sqrt{C.\, aabb - b}$, fiet, utramque partem in se multiplicando cubicè, $z \propto aabb - b$. Et sic de aliis.

De Reductione per Divisionem.

POstea si detur $zz \propto 4z$: quoniam, æqualibus per æqualia vel idem divisis, proveniunt æqualia, fit ut, si utraque pars dividatur per z, oriatur $z \propto 4$. Sic & si habeatur $z^4 \propto az^3 + bbzz$, dividendo utrinque per zz, fiet $zz \propto az + bb$. Similiter fit, si proponatur $3z \propto 12$: etenim si utrobique dividatur per 3, proveniet $z \propto 4$. Eodem modo si fuerit $az \propto ab$, dividendo utramque partem per a, fiet $z \propto b$. Nec aliter si habeatur $ax - bx \propto bb$, orietur, divisâ utrâque parte per $a - b$, $x \propto \frac{bb}{a-b}$. Haud secus si proponatur $azz + bzz \propto abz + bbz - abb - b^3$: quoniam utraque pars dividi potest per $a + b$, orietur $zz \propto bz - bb$. Sic & si fuerit $azz - bzz \propto aaz - bbz + abc$, dividendo utrinque per $a - b$, fiet $zz \propto az + bz + \frac{abc}{a-b}$, seu $zz \propto \begin{smallmatrix} a \\ +b \end{smallmatrix} z + \frac{abc}{a-b}$. Pag. 149. lin. 27.

Huc referendum quoque est, cùm binæ æquationis partes, juxta modum p. 34. ostensum, reduci possunt ad simpliciores terminos. Ut si fuerit æquatio inter $az^4 - abz^3 + abbzz$ & $-abz^3 + 2abbzz - 2ab^3z + ab^4$: dividendo utramque partem per maximum communem divisorem $azz - abz + abb$, orietur $zz \propto -bz + bb$.

De Reductione per Extractionem Radicis.

DEnique ad reducendum $zz \propto 25$: quoniam æqualium quadratorum ac cuborum &c. æqualia quoque sunt latera seu radices, fit ut, si ex utraque parte extrahatur radix quadrata, pro-

veniat $z \infty 5$. Sic & si fuerit $z^3 \infty 125$, erit, extractâ utrinque radice cubicâ, $z \infty 5$. Eâdem ratione, si habeatur $zz \infty aa + 2ab + bb$: extractâ utrobique radice quadratâ, fiet $z \infty a + b$. Nec aliter fit si fuerit $zz \infty aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, erit enim $z \infty a + \sqrt{bc}$. Non secus si xx

Pag. 6. æquetur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, erit $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

His subjunge sequens exemplum, in quo omnes præcedentes modi reductionis simul occurrunt. Proponatur $\sqrt{\frac{zz + 3aa}{4}} - \sqrt{\frac{zz - 3aa}{4}} \infty \sqrt{\frac{azz}{b}}$: quia igitur eorum, quæ æqualia sunt, æqualia quoque sunt quadrata, fiet, multiplicando utramque partem in se quadratè, $\frac{1}{2}zz - \sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}} \infty \frac{azz}{b}$. Addatur jam utrinque $\sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$, & subtrahatur $\frac{azz}{b}$, transferendo scilicet ipsas in alteram partem sub contrario signo, ut habeatur $\sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$ sola ex una parte, fietque $\frac{1}{2}zz - \frac{azz}{b} \infty \sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$. Quo facto, multiplicetur rursus utraque pars æquationis in se quadratè, ut evanescat signum radicale; habebiturque $\frac{1}{4}z^4 - \frac{az^4}{b} + \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{z^4 - 9a^4}{4}$. Ubi si utrinque dematur $\frac{1}{4}z^4$, ac reliquæ partes omnes addendo ac subtrahendo ex una parte in alteram transferantur, quod fit mutatis tantùm signis, erit $\frac{az^4}{b} - \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{9a^4}{4}$. Porrò ut deleantur fractiones, reducantur omnes termini ad communem denominatorem $4bb$: quo peracto, si utrinque per eundem multiplicetur, ipsum nempe denominatorem omittendo, obtinebitur $4abz^4 - 4aaz^4 \infty 9a^4bb$. Dividatur jam ubique per a, hoc est, a ubique deleatur fitque $4bz^4 - 4az^4 \infty 9a^3bb$: quo facto, dividatur utraque pars per $4b - 4a$ ut habeatur quantitas z^4 ex una parte sola, eritque $z^4 \infty \frac{9a^3b}{4b-4a}$. Ubi si utrobique extrahatur radix quadrata, habebitur $zz \infty \frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}$: & si denuo utrinque extrahatur radix quadrata, invenietur $z \infty \sqrt{\frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}}$.

E quibus patet, reductionem per additionem & subtractionem

nem institui tam ad diminuendam multitudinem terminorum, quàm ad æquationem ritè ordinandam; reductionem verò per multiplicationem ad evitandas tum fractiones tum quantitates surdas; & reductionem per divisionem, tam ad deprimendas dimensiones, quàm ad reducendam æquationem ad debitam formam & simplicissimos terminos; ac denique reductionem per extractionem radicis, ad obtinendam æquationem ex minimis terminis constantem; præterquam quòd omnes hæ reductiones etiam ad quantitatem quæsitam ex data æquatione inveniendam utiles esse possint. Atque hæc quidem ad introductionem Methodi Geometriæ Renati Des-Cartes dicta sufficiant.

F I N I S.

Menda Typogr. in hac Introductione ita corrigantur:

Pag. 11. l. 2. pro $\frac{1}{3}aa$ leg. $\frac{1}{2}aa$. p. 12. l. proant. pro $+bc$ l. $-bc$. p. 13. l. 30. & 31. pro *linem* l. *lineam*. p. 36. l. 10. & ult. pro $\surd\, oo + 4mp$. l. $\sqrt{oo + 4mp}$. p. 39. l. 27. pro $\sqrt{aa + bb + b}$ l. $\sqrt{aa + bb} + b$.

FRAN-

FRANCISCUS à SCHOOTEN

AD LECTOREM.

NE superstes hæc Pagina vacua relinqueretur, visum fuit hoc loco indicare sphalmata, quæ in Exercitationibus nostris Mathematicis, quas anno 1657. in lucem emisimus, fuerunt commissa, ac postmodum à nobis recognita; ut ea sequenti modo Lector Benevolus emendare dignetur:

Pag. 6. l. 2 lege *pretium*. p. 7. l. 8 lege *quæstio*. p. 163. l. penult. lege *quæsiverim*. p. 193. l. 12 lege *nullæ omnino*. p. 228. l. 3. lege fit $zz-2aa$. ibid. l. penult. lege *in circumferentia*. p. 295. l. 28 lege *descriptio*. p. 317. l. 22 lege *quod est rectum*. p. 327. l. 4 lege *Ostenso*. ibid. l. antep. lege *ipsa circa* p. 329. l. 10. pro EG lege EC. p. 347. l. 5. pro EC, EF lege ,C, ,F. p. 361. l. 1 lege *ad E, ita ut AE sit æqualis AE*. p. 372. l. antep. post *Quod*, & p. 393. l. 9 post *Quod eo* tolle virgulas. p. 423. l. 15 pro 69 lege 639. p. 432. l. 7. lege 1634. p. 434. l. ult. & p. 462 l. 30, ut & p. 480. l. 24. lege *abs re*. p. 471. l. 22. lege *in locum* xx. p. 525. lineæ 6, 7, 8, 9, 10 in locum linearum 2, 3, 4, 5 sunt substituendæ, & vice versâ. p. 527. l. 21 lege *Hæ autem*.

DE ÆQUATIONUM *Natura, Constitutione, & Limitibus* Opuscula Duo.

Incepta à

FLORIMONDO DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliario Regio;

Absoluta verò, & post mortem ejus edita

ab

ERASMIO BARTHOLINO,
Medicinæ & Mathematum in Regia Academia
Hafniensi Professore publico.



FRANCOFURTI,
Apud JOHANNEM FRIDERICUM KNOCH.
CIↃ IↃC XCV.

SUMMO MUSARUM
MECOENATI
ILLUSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO
DOMINO,

JOACHIMO GERSDORPH

TOPARCHÆ IN TUNDBYHOLM, &c.
EQUITI AURATO,
REGNI DANIÆ SUMMO AULÆ MAGISTRO,
PRINCIPI SENATORI,
REGIÆ MAJESTATIS PRÆSIDI BORINGHOLMENSI
HOC
SPECIMEN ANALYTICES
NOVO ARGUMENTO
CONSECRAT
OBSEQUIUM.

Quod

QUod jam pridem in votis erat, ſtudii & pietatis meæ experimentum Tibi probari, id recentiſſima Muſarum Algebra interpretabitur. Etſi enim, beneficia maxima, quibus me totamque domum noſtram oneràſti, quàm grato animo exceperim, mihi ipſe ſim teſtis; tamen miſeram eam vitam putavi, cui eſſe gratam probare antea non licuit: id aliquo obſequio, tum ipſi Tibi, tum cæteris omnibus indicatum, maximeque perſpicuum eſſe deſideravi. Neque æquum eſt, virtutis deprædicationem privatis tantùm parietibus claudi. Inter ingratos etiam annumerantur ii, qui beneficia accepta paucis commemorant; totus Orbis, adhibendus eſt, pietatis noſtræ teſtis & conſcius. Quoniam verò monimentum Tuarum virtutum nulla unquam obſcurabit oblivio; nullum erit tali Heroï dignius genus obſequii, quàm quod nulla temporis circumſcriptione terminatur. Quocirca hoc opuſculum Algebraïcum opportuniſſimum exiſtimavi, quod

meæ perpetuæ obſervantiæ teſtem ſempiternum conſtituerem; in quod haud obſcurè conjicio, nihil ſenectuti, nihil ſucceſſoribus licere. Mirandam Algebræ vim multis verbis exponere ſupervacuum eſt, quippe ſecura demonſtrationis ſuæ, ſemper & pacis & belli ſerviit artibus; in qua hoc eximium eſt, quòd abundantias defectuſque pari momento æſtimet, neque illi, quæ plus habent, magis neceſſaria ſunt, quàm quæ minus; atque hoc ſuæ ſcientiæ habet monimentum, quod mortales faciunt Virtutis. Verùm, artium & ſcientiarum incrementa, non in ipſarum modò ingenio, ſed etiam in ſuperiorum clementia ſita ſunt; æſtimantur quoque pleraque mortalium pretio, quod libido calumniandi conſtituit; & quis neget, eximium decus, ſæpiùs favoris, quàm virtutis eſſe beneficium? unde patrono & defenſore iis opus eſt, ſub cujus auſpiciis floreant. Algebræ nihil ad augendum faſtigium ſupereſt, hoc tamen uno modo creſcere poteſt. Te ergo præſertim invocat, cujus cepimus & affectus & judicii experimentum, quantum maximum

Muſæ

Musæ capere potuerunt. Indulgentiæ Tuæ propinquum exemplum est Astronomia, quam in Tuo gremio suscepisti, cum naufragium illud observationum Tychonicarum, quas invidiosâ tranquillitate provectas improvisus turbo abstulerat, Tuâ benignitate resarcires. Tuo beneficio patriam receperunt. Taceo literas Græcas, quas majoribus suis ita reddidisti, ut illæ utrum plus Tibi, an Tu illis debeas, ambigi possit. Et ut verbo absolvam, Tuæ benevolentiæ usum nec litteris nec hominibus unquam denegasti. Quare illud extremum oro, ut eidem Generositati, cui tribuisti hoc, ut literas susciperes, attribuas, ut susceptas tuearis ac foveas: atque hoc grati animi, non omnino quale velim, sed quale possum hoc tempore monimentum, favore excipere digneris. Celebratum est famâ & acclamatione quantum Astronomiam amplificaverit Dania, Tibi verò renascentis Astronomiæ gratia debetur. Et si proposito annueris, non tam patriæ quàm Tibi debitorem constitues etiam Algebram, hoc est, Mathesin Universalem. Ego florentem virtu-

tis Tuæ gloriam æternam opto, Tibique felicissimos annos precatus, in clientelam Tuam receptum esse, supra humanum solatium recreabor.

Ill^{æ} & Exc^{mæ} D^{ni} V^{æ}

Hafniæ, Anno
cIↃ IↃc LVII.

Deditissimus

ERASMIUS BARTHOLINUS,
Medicinæ & Mathematum Professor Regius.

ERASMI BARTHOLINI
Ad Tractatum de Natura & Constitutione Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS

Ad Clarissimum Virum

CLAUDIUM HARDY,

Regis Galliæ Consiliarium.

Quamvis sinistra hujus seculi judicia parùm apud me valeant, tamen à divulgandis ejusmodi quemlibet jure absterrerent, quæ diversas hominum censuras vitare nequeunt. Verùm ego alto supercilio spretis calumniis, æquitatis amantior & publicæ utilitatis, proposito desistere nòlui, tibiq;, Vir Clarissime, exponere constitui, ea, quæ ad præfationem utilia esse putavi, eò libentiùs, quò cognoverim amicissimum tibi fuisse, dum in vivis esset, D. De Beaune, in Curia Blesensi Consiliarium Regium. Nam etsi vir hic fuerit pereleganti ingenio, & in tantum laudandus, in quantũ intelligi virtus potest; tamen hoc in eo maximum fuit, quòd Mathemata doctissimus, ut tempore æqualis Viro summo D. Des-Cartes, ita Analytices speciosæ peritiâ proximus. Quo momento impulsus, dum Blesiis linguæ Gallicæ exercendæ gratiâ degerem,

gerem, amicitiam tanti Viri colui, diligenterque eâ familiaritate usus sum, quâ ipse me comiter amplectebatur. Interea de rebus Mathematicis omnis ferè sermo, & quoties alterutri de Analyticis sermocinari volupe, toties nostra conferri colloquia necesse erat. Unde non obscurè intellexi, quantis fuerat ingenii dotibus ac studiorum eminens, à quo, si publica negotia permitterent, perfectio Algebræ maximè sperari posset. Quare variis precibus hortatus sum, ut, quæ meditatus erat, publicis destinaret usibus. Verùm ille multa sibi obstare, occupationes tam publicas quàm privatas, valetudinem, operas amicorum, ea denique principia, quæ ad intellectum suarum meditationum necessaria erant, desiderari innuebat. Tum ego, & meam operam ipsi polliceri paratissimam cœpi, & significare conscriptam esse à me Isagogen Cartesianam, quorum neutrum proposito moram afferre diutiùs posset. Quibus valde recreatus, de edendis operibus suis seriò cogitabat. Sed, cum Arthriticis doloribus plus solito lecto detineretur, omnem à Mathematicis, ad corporis valetudinem, curam transferre cogebatur. Ego interim ad perlustrandas reliquas

Gal-

Galliæ provincias avocatus, per aliquod tempus substiti Flexiæ; unde, cum varia negotia reverti Lutetiam suaderent, placuit Castrum Blesense transire, ut de sanitate amici certior fierem. Quem in prædio suo, cum doloribus Colicis acriter conflictantem, cùm deprehendissem, & affirmantem parùm prosperâ valetudine ex eo tempore se usum fuisse; non mediocriter dolui, egregiis inventis fortunam tam esse adversam: mea verò studia iteratò obtuli, promittens, me bono publico, ejusque gratiâ, quasvis subiturum molestias. Sed postquam relaxationis morbi nulla affulgeret spes, suspirans valedixi, iterque susceptum ingressus, Lutetiam redii. Vix ibi consueta studia revocaveram, cum literæ mihi redderentur ab hospite meo, Viro humanissimo; D. Antonio Marchais, in urbe Blesense tunc linguæ Gallicæ Professore, nunc verò Serenissimi Principis Gastonis, Ducis Aurelianensium, Mathematico, quibus nuntiabatur, ægrum nostrum, oculorum usu privatum fuisse, temporibus solstitii Brumalis; ab acrimonia defluxionis Arthriticæ; exoptasse verò meam præsentiam tanto desiderio, ut de editione cogitationum suarum desperaret, nisi meâ

operâ uti posset; adeoque rogâsse, nisi grave nimis esset, operam quam pollicitus eram accommodarem. Exarserat eâ tempestate, bellum civile inter Regem Galliæ & Principes consanguineos, sedesque exercitus Principum erat Stampæ, quam obsidione aggrediebatur Dux exercitus Regii. Hac cum transeundum esset iis, qui ad Comitatum Blesensem pergunt; ancipiti curâ distractus, constitueram tamen longissimis viarum ambagibus, per Normanniam & Ducatum Andegavensem potiùs iter moliri, quàm spes amici deserere. Quippe ea pars territorii Parisiensis, Rothomagum versùs, tantùm militibus vacavit. Cum inexspectato, propter adventum exercitus Lotharingici, solutâ obsidione Stampæ, ager Gastinensis, milite utriusque partis liberaretur; prædonibus tamen infestari vias significatum est. Quare arreptâ occasione, dissuadentibus amicis, itineri me commisi; parvi æstimans, uno periculo, & amico prodesse, & præclara inventa redimere. Neque primas spes fortuna destituit; quippe emenso periculosissimo itinere, salvus revisi amicum, corpore satis sanum, nisi lumen oculorum rapuisset ægritudo. Sed dubium itine-

ris

ris eventum deterior fortuna excepit; cum in primordio nostrorum operum, forsan quòd diligentius, quàm permitteret anni tempus, Algebraicis subtilitatibus incumberem, æstate mediâ, summis caloribus, sub Caniculam, in gravissimum morbum ex febri synocho inciderem. Et jam de mea salute desperantibus Medicis, inopinatò animam efflavit Vir Amplissimus D. De Beaune. Nam, cum amico aliquo, qui lecto ejus assederat, de rebus Analyticis differentem, subitò destituit vox, deinde totum corpus vitalis calor reliquit, atque evasit perpetuam valetudinem die 19 *Augusti. Anno* 1652, *natus Anno* 1601 *die* 27 *Sept. Sic præcipitantibus fatis, fefellit spes omnium mortalitas. Ego cum mihi indicari inconsultum ducerent nostri, dum morbus nondum declinaret, ne ægritudinem aggravarent, non nisi post multum tempus id rescivi. Tum nihil cunctatus, operam dedi, ut fidei meæ committerentur, quæ relicta fuerant adversaria, nullam curam mortuo detrectans, quam vivo destinaveram, publicæ utilitatis rationem habiturus. Reluctantibus verò hæredibus, cum alius pecuniâ sollicitasset animos eorum; parum abfuit, quin idem scripta, qui auctorem, casus traxisset. Ergo omni studio demonstrare occœpi, perituros omnes defuncti conatus nisi mihi traderentur; sparsas chartas, sine ordine, sine numero, sine explicatione, notis & characteribus exaratas supputationes, non ab alio intelligi posse, quàm qui aliquo tempore cum ipso familiariter vixisset. Quibus perpensis, tandem obtinui propositum, sed majori labore, quam successu. Quippe omnia diligentiùs inspiciens, animadverti plura affectata quàm effecta. Inter tot adversaria solummodo absolutum inveni opus de Angulo Solido, quod jam pridem in publicum edidissem, nisi sumptus, propter copiam figurarum, Bibliopolæ fastidivissent. Tractatûs de Natura & Constitutione Æquationum ne litera quidem extabat, menti tamen D. de Beaune pleraque conformia esse differendo dum licuit cum vivo comperi. Ex iis, quæ de Limitibus Æquationum conscripsi, quædam reperta sunt in adversariis, quibus, cum multa desiderarentur, ultimam manum imponere necesse*

 habui.

habui. Præfationem denique, quam Author huic operi præmittendam duxit, ne religio esset omittere, addidi. Non ignoras, Vir Clarissime, me rogatu Authoris omnia Gallicè prius conscripsisse, tibique & aliis perlegenda dedisse & corrigenda; tamen nunc Latinè edere coactus sum, ne diutiùs laterent. Nam etsi tibi, dum in Italia degerem, adeò cordi fuerit horum scriptorum à me tibi relictorum editio, ut sumptibus propriis excudi parares, quo nomine multum tibi debebunt posteri; tamen ne in Gallia quidem votum assecutus es. Quocirca, cum Amstelodami iterato prælo subjiceretur Geometria Renati Des-Cartes, id operam dedi, ut hæc unà imprimerentur. Consentiente verò Typographo modò Latinè extarent, placuit Latinam interpretationem in consilium adhibere, & potiùs authoris precibus inobediens, quàm publici negligentior reputari. Quod perpendendum relinquo iis, qui me violatæ fidei tacitè accusabunt. Subjunxissem alia, quorum vestigia adhuc supersunt in adversariis, sed quædam tanti indigent laboris, ut de restitutione quasi desperem, alia remoratur multitudo figurarum: cuncta tamen brevi videbit benevolus Lector, si Typographi obedierint. Interea hisce fruere, tuque Vir Clarissime, judica quid ex meis curis, & difficillimis itineribus fructus colligi possit, tuum namque judicium erit instar omnium. Quod si tamen & alii confiteantur, hinc non exiguum emolumentum ad omnes redundare, rogo ut id Manibus Viri Clarissimi Florimondi de Beaune acceptum referant; errores verò si offenderint, benignè corrigant; meæque humanitati ascribant. Vale.

FLO-

FLORIMONDI DE BEAUNE

PRÆFATIO.

Decreveram in publicum edere hosce tractatus, multò prolixiores atque perfectiores, proximo insequente anno. Verùm anni hujus initio conflictatus cum gravissimo ad oculos defluxu, oculorum usu privatus fui. Unde proposito planè destitissem, nisi D. Erasmius Bartholinus operam mihi suam, ne mea circa hanc artem inventa oblivione sepulta jacerent, obtulisset. Ejus igitur auxilio hoc opus composui, ad quod intelligendum suppono Lectores jam in Geometria Renati Des-Cartes versatos, additisque in eam Notis, à nobis olim (non quidem animo illas in publicum edendi) concinnatis; ut & doctissimis Francisci à Schooten Commentariis; nec non Principiis Matheseos Universalis, seu Introductione ad Methodum Geometriæ Renati Des-Cartes, ab eodem Bartholino editâ.

PRIOR TRACTATUS
DE
NATURA
ET
CONSTITUTIONE
ÆQUATIONUM.

DE

DE
NATURA AEQUATIONUM.

Caput I.

MUltò faciliùs inveniemus Naturam & Constitutionem Æquationum ex earum generatione & comparatione cum similibus seu ejusdem formæ, quàm conferendo earum radices cum certis mediis Geometricè proportionalibus, ut præstitit Vieta.

Æquationes autem facilitatis gratiâ ita disponere libet, ut omnes termini ab una parte reperiantur æquales nihilo, ponendo ipsos ordine, prout gradatim per incognitæ quantitatis dimensiones descendunt. Primum enim terminum vocabimus, ipsam quantitatem incognitam, quæ plurimarum dimensionum existens nullis aliis quantitatibus adficitur; secundum verò, in quo incognita quantitas unâ dimensione minor est; tertium in quo duabus; & sic deinceps, usque ad terminum omnino cognitum, quem pro ultimo habemus. Deinde, loca, ubi terminorum aliqui deficiunt, asterisco complebimus, quæ tum sub numero terminorum comprehendentur. Hæc omnia beneficio transpositionis facilè peraguntur.

Ex iis, quæ scripta & commentata sunt in Geometriam Renati des Cartes, nota est methodus cognoscendi, quot haberi possint radices in qualibet Æquatione: nimirum, posse Æquationem tot habere veras radices, quot mutationes signorum continuæ adfuerint, & quoties eadem signa se invicem sequuntur immutata, tot posse reperiri falsas radices: modò in numerum terminorum ii numerentur, qui deficiunt.

Porrò, duas Æquationes similes esse dicimus seu ejusdem formæ, quando in utraque idem est primus terminus, & reliqui termini in utraque similiter sunt affecti; & si in una terminus aliquis abfuerit, ut is quoque absit in altera. Nam cùm similes sunt Æquationes, eandem habebunt constitutionem & naturam, & fieri poterit comparatio seu collatio singulorum terminorum unius cum singulis terminis correspondentibus alterius.

CAPUT II.

De natura & constitutione Æquationum Quadratarum, seu duarum dimensionum.

QUando æquationes hæ sunt affectæ, reducuntur omnes ad tres formas sequentes:

$$xx + lx - mm \infty 0$$
$$xx - lx - mm \infty 0$$
$$xx - lx + mm \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad intelligendam naturam & constitutionem prioris æquationis, formetur per multiplicationem harum duarum $x - b \infty 0$ & $x + c \infty 0$ sequens æquatio: $xx \begin{matrix} -b \\ +c \end{matrix} x - bc \infty 0$. Supponendo igitur c majorem quàm b, eandem habebit formam atque prima propositarum $xx + lx - mm \infty 0$, & per consequens, binæ hæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat collatio unius cum altera; & per comparationem terminorum secundorum habebimus $c - b \infty l$. Unde discimus, l esse differentiam inter falsam radicem c & veram b; &, cognitâ falsâ c, veram b esse æqualem ipsi $c - l$; &, cognitâ verâ b, falsam c esse æqualem ipsi $b + l$.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum habebimus mm æqualem bc. Unde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b æqualem esse $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falsam c æqualem esse $\frac{mm}{b}$.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $x - b \infty 0$ & $x + c \infty 0$, æquatio $xx \begin{matrix} -b \\ +c \end{matrix} x - bc \infty 0$. In qua si supponamus b majorem quàm c, erit ipsa ejusdem formæ cum secunda proposita $xx - lx - mm \infty 0$. Et per consequens duæ illæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo collatione unius cum altera, habebimus ex collatio-

latione secundorum terminorum $c - b \infty - l$, vel $l \infty b - c$. Unde discimus, quòd l est differentia inter veram radicem b & falsam c; & si cognita fuerit falsa c, erit vera b æqualis $l + c$; & si fuerit cognita vera b, falsa c erit æqualis $b - l$.

Porrò, per comparationem postremorum terminorum, habebimus $mm \infty bc$. Unde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b esse æqualem $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falsam c esse $\infty \frac{mm}{b}$.

3 *Propositio*.

Pro tertia supra posita æquatione, formemus, per multiplicationem duarum $x - b \infty 0$ & $x - c \infty 0$; æquationem sequentem $xx - bx + bc \infty 0$, & habebit eandem formam atque proposita
$$\begin{matrix} -c \end{matrix}$$
tertia $xx - lx + mm \infty 0$, & consequenter hæ binæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Comparemus ergo unam cum altera, atque ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$. Unde discimus, quòd l est summa duarum verarum radicum, & si una earum, exempli gratiâ, c, est cognita, reliqua b æquabitur $l - c$.

Præterea ex comparatione ultimorum terminorum habebimus $mm \infty bc$, hoc est, mm æquale rectangulo sub duabus veris radicibus, quarum si alterutra est nota, exempli gratiâ, c, altera b æquabitur $\frac{mm}{c}$.

Quantum ad æquationem quadratam $xx - mm \infty 0$, quæ non est affecta, ipsa oritur ex duabus sequentibus $x - m \infty 0$, & $x + m \infty 0$. Unde sequitur ipsam duas possidere radices, unam veram, alteram falsam, quarum utraque æquatur ipsi m.

CAPUT III.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu tertiæ dimensionis, secundo termino carentium.

OMnes hæ æquationes reducuntur ad tres sequentes formas:

$$x^3 * + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 * - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 * - mmx + n^3 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem prioris æquationis propositæ, formemus per multiplicationem harum duarum $xx + bx + cc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem
$x^3 * - bbx - bcc \propto 0$. Supposito autem cc majori quàm bb,
$+ cc$
ipsa eandem habebit formam atque prima proposita $x^3 * + mmx - n^3 \propto 0$. & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat igitur illarum collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $cc - bb \propto mm$. Unde constat, si vera radix b cognoscitur, cc fore æquale $mm + bb$, & consequenter $xx + bx + mm + bb \propto 0$. quæ æquatio duas reliquas radices respicit, ac cum vera radice b concurrit ad formandam æquationem propositam.

Præterea, factâ comparatione ultimorum terminorum, habebimus $n^3 \propto bcc$. Unde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto 0$ similiter duas reliquas radices respicere, & cum vera b concurrere ad formationem propositæ æquationis.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $xx + bx + cc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquatio $x^3 * - bbx - bcc \propto 0$. Supposito autem bb majori quàm cc, ha-
$+ cc$
bebit illa eandem formam atque secunda $x^3 * - mmx - n^3 \propto 0$, & per consequens habebunt eandem naturam & constitutionem. Fiat igitur collatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $bb - cc \propto mm$. Unde constat, cc esse æquale $bb - mm$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \propto 0$ duas reliquas radices concernere. Porrò, ex comparatione duorum postremorum terminorum, habebimus $n^3 \propto bcc$, unde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b}$ similiter ad duas reliquas respicere.

3 *Pro-*

3 *Propositio.*

Ad inveniendam naturam & constitutionem tertiæ æquationis propositæ, fiat ex duabus hisce $xx + bx - cc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 * - bbx + bcc \infty 0$, eandem habens formam cum
$- cc$
tertia proposita $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$. Unde & ipsæ eandem habebunt naturam atque constitutionem. Fiat ergo collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $bb + cc \infty mm$. Unde constat, cc æquale esse $mm - bb$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \infty 0$ ad duas reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$, & per consequens $cc \infty \frac{n^3}{b}$. Quare, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + bx - \frac{n^3}{b} \infty 0$ similiter duas reliquas radices concernet.

CAPUT IV.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, tertio termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur ad tres formas sequentes:

$$x^3 + lxx * - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx * - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx * + n^3 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, fiat per multiplicationem harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 - bxx * - bbc \infty 0$. Et suppositâ c majore
$- c$
quàm b, habebit ipsa eandem formam cum prima proposita $x^3 + lxx * - n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ. Factâ ergo collatione, habebimus ex comparatione secundorum terminorum $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Unde constat, cognitâ

nitâ verâ radice b, æquationem $xx + bx + bb + bl \infty 0$ duas
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + l$

reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione duorum ultimorum terminorum, habebitur $n^3 \infty bbc$. unde sequitur c esse æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ radice b, æquationem $xx + \frac{n^3}{bb}x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex multiplicatione harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio
$x^3 - bxx * - bbc \infty 0$. Et suppositâ b majore quàm c, erit ejus-
$\quad\; + c$

dem formæ cum secunda propositarum $x^3 - lxx * - n^3 \infty 0$, adeoque erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur collatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $b - c \infty l$. Unde constat, c esse æqualem $b - l$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - bl \infty 0$ duas
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad - l$

reliquas radices respicere.

Porrò per comparationem postremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bbc$. Unde sequitur c esse æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, si vera radix fuerit cognita, hanc æquationem $xx + \frac{n^3}{bb}x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione formemus ex duabus $xx - cx - bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^3 - cxx * + bbc \infty 0$, quæ
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad - b$

habebit eandem formam atque tertia æquationum propositarum $x^3 - lxx * + n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Quare factâ collatione, per comparationem secundorum terminorum habebimus $c + b \infty l$. Unde discimus, quòd c æquetur $l - b$; &, si vera radix b sit cognita, quòd æquatio $xx + bx + bb - bl \infty 0$ ad duas reliquas radices investigan-
$\quad\quad - l$

das referri debeat.

Præ-

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $n^3 \infty bbc$, unde ſequitur c æquari $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx - \frac{n^3}{bb}x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ reliquis duabus inveniendis inſervire.

CAPUT V.

De natura & conſtitutione Æquationum Cubicarum ſeu trium dimenſionum, in quibus omnes termini extant.

ÆQuationes hæ reducuntur ad ſeptem formas ſequentes:

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$

1 *Propoſitio.*

Ad cognoſcendam naturam & conſtitutionem primæ propoſitionis, fiat ex multiplicatione $xx - cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$, æquatio ſequens $x^3 \begin{matrix} -bxx \\ -c \end{matrix} \begin{matrix} +ddx \\ +bc \end{matrix} - bdd \infty 0$. atque eandem habebunt naturam & conſtitutionem. Factâ ergo comparatione, ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$, vel $c \infty l - b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd + bc \infty mm$, hoc eſt, $dd \infty mm + bb - bl$, quoniam c eſt inventa æquari $l - b$. Unde apparet, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{matrix} -lx \\ +b \end{matrix} + mm + bb - bl \infty 0$ duas reliquas radices reſpicere. Denique ex collatione poſtremorum terminorum habebimus $bdd \infty n^3$. unde conſtat, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{matrix} -lx \\ +b \end{matrix} + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ æquatio hæc $x^3 - bxx - bcx - bdd \propto 0$.
$\quad\quad\quad\quad + c \quad\;\; + dd$
& suppositâ c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit eandem formam, quam propositio secunda $x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c - b \propto l$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \propto - mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, habebitur $dd \propto bl + bb - mm$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + lx + bb + bl - mm \propto 0$ duabus reliquis radicibus investi-
$\;\; + b$
gandis esse utilem. Denique, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $bdd \propto n^3$. Unde sequitur dd fore æqualem $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ vera radice b, æquationem hanc

$xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto 0$ reliquis duabus inservituram.
$\;\; + l$

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione, fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ eadem æquatio $x^3 - bxx - bcx - bdd \propto 0$.
$\quad\quad\quad\quad + c \quad\;\; + dd$
Et suppositâ b majore quàm c, & bc majore quàm dd, erit ejusdem formæ cum tertia propositarum $x^3 - lxx - mmx - n^3 \propto 0$, & consequenter ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $c - b \propto - l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \propto - mm$, hoc est, substituto valore invento ipsius c, erit $dd \propto bb - bl - mm$. Unde constat, quòd, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + bx + bb \propto 0$
$\quad\quad - l \;\; - bl$
$\quad\quad\quad\quad - mm$
ad duas investigandas reliquas adhiberi possit. Denique, ex collatione

latione postremorum terminorum, habebitur $bdd \propto n^3$. Unde sequitur, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{matrix}+b\\-l\end{matrix} x + \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad duas reliquas quærendas esse utilem.

4 *Propositio*

Pro quarta propositarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ eadem æquatio $x^3 \begin{matrix}-b\\+c\end{matrix} xx \begin{matrix}-bc\\+dd\end{matrix} x - bdd \propto 0$. Et suppositâ c majore quàm b, & dd majore quàm bc, erunt ejusdem formæ ac quarta propositio $x^3 + lxx + mmx - n^3 \propto 0$, & consequenter ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $c - b \propto l$, seu $c \propto l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $dd - bc \propto mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, erit $dd \propto bb + bl + mm$. Unde constat, cognitâ vera radice b, hanc æquationem $xx \begin{matrix}+b\\-l\end{matrix} x + bb + bl + mm \propto 0$ duas reliquas radices respicere. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $bdd \propto n^3$. Unde sequitur, dd fore æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{matrix}+b\\+l\end{matrix} x + \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad indagandas duas reliquas adhiberi posse.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione fiat ex multiplicatione $xx - cx - dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ æquatio $x^3 \begin{matrix}-c\\-b\end{matrix} xx \begin{matrix}-dd\\+bc\end{matrix} x + ddb \propto 0$. Et supposito bc majore quàm dd, erit ejusdem formæ cum quinta propositarum $x^3 - lxx + mmx + n^3 \propto 0$, & consequenter ejusdem naturæ & constitutionis erunt. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum, habebimus $l \propto c + b$, vel $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $bc - dd \propto mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, erit $dd \propto bl - bb - mm$. Unde discimus, cognitâ radice verâ b, æqua-

æquationem hanc $xx - lx - bl + bb + mm \propto 0$ duabus reli-
$ + b$
quis inveniendis esse usui. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $n^3 \propto bdd$. Unde colligitur dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ radice verâ b, hanc æquationem $xx - lx - \frac{n^3}{b} \propto 0$
$ + b$
duabus reliquis inveniendis inservire.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione formetur ex duabus $xx + cx - dd \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquatio $x^3 + cxx - ddx + ddb \propto 0$. Et, suppositâ
$ - b \quad - bc$
c majori quàm b, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositarum $x^3 + lxx - mmx + n^3 \propto 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, seu $c \propto l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum erit $mm \propto dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, habebitur $dd \propto mm - bl - bb$. Unde constat, si vera radix b sit cognita, hanc æquationem $xx + lx - mm \propto 0$, pro duabus reliquis inveniendis
$ + b \quad + bl$
$ + bb$
usui futuram. Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $ddb \propto n^3$: & per consequens $dd \propto \frac{n^3}{b}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + lx - \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad investigandas
$ + b$
duas reliquas utilis erit.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione formetur ex duabus $x - b \propto 0$ & $xx + cx - dd \propto 0$ æquatio $x^3 + cxx - ddx + ddb \propto 0$. Sup-
$ - b \quad - bc$
positâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam cum septima propositarum $x^3 - lxx - mmx + n^3 \propto 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur comparatione, orietur ex collatione secundorum terminorum,

$l \propto b -$

$l = b - c$, seu $c = b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $mm = bc + dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, habebitur $dd = mm - bb + bl$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} x - mm + bb - bl = 0$ ad inveniendas duas reliquas inservire. Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $ddb = n^3$, unde erit dd æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cùm cognoscitur vera radix b, hæc æquatio $xx \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} x - \frac{n^3}{b} = 0$ ad duas reliquas inveniendas adhiberi poterit.

CAPUT VI.

De naturâ & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentium.

Hujus generis æquationes ad tres formas sequentes reducuntur:

$$x^4 ** + n^3 x - p^4 = 0.$$
$$x^4 ** - n^3 x - p^4 = 0.$$
$$x^4 ** - n^3 x + p^4 = 0.$$

I *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis formemus ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 = 0$ & $x - b = 0$ hanc æquationem $x^4 ** \begin{array}{l}+c^3\\-b^3\end{array} x - bc^3 = 0$. Supposito verò c^3 majore quàm b^3, habebit ea eandem formam atque prima propositio $x^4 ** + n^3 x - p^4 = 0$, & per consequens erit ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebitur $c^3 - b^3 = n^3$, hoc est, $c^3 = n^3 + b^3$. unde cognoscimus, quando innotescit vera radix b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx + n^3 + b^3 = 0$ spectare ad investigationem trium reliquarum radicum.

Præterea, collatis ultimis terminis, fit $p^4 = bc^3$: unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas investigandas posse usurpari.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * * + c^3 x - bc^3 \infty 0$. Et, si pona-
$\qquad - b^3$
tur b^3 major quàm c^3, habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 - b^3 \infty - n^3$, hoc est, $c^3 \infty b^3 - n^3$. Unde cognoscimus, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 - n^3 \infty 0$, ad tres reliquas radices respicere. Porrò, comparatis inter se terminis ultimis, habebimus $p^4 \infty bc^3$. Unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tres reliquas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx - c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 * * - c^3 x + bc^3 \infty 0$, & habebit eandem
$\qquad - b^3$
formam atque tertia propositarum $x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 + b^3 \infty n^3$, hoc est, $c^3 \infty n^3 - b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - n^3 + b^3 \infty 0$ ad tres reliquas investigandas adhiberi posse. Præterea ex collatione ultimorum habebitur $p^4 \infty bc^3$. Unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas quærendas esse utilem.

CA-

CAPUT VII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, tertio & quarto termino carentium.

ÆQuationes hæ ad sequentes tres formas reducuntur:

$$x^4 + lx^3 ** - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 ** - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 ** + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione harum duarum $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l} + c \\ - b \end{array} x^3 ** - b^3c \infty 0$. Supposità vero c majore quàm b, habebit illa eandem formam atque prima propositio $x^4 + lx^3 ** - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Unde discimus, cognità verà radice b, hanc æquationem $x^3 + \begin{array}{l} b \\ + l \end{array} xx + \begin{array}{l} bl \\ + bb \end{array} x + b^3 + bbl \infty 0$ tribus reliquis investigandis inservire. Deinde, collatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty b^3c$. unde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognità verà radice b, hanc æquationem $x^3 + \frac{p^4}{b^3}xx + \frac{p^4}{bb}x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas adhiberi posse.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l} + c \\ - b \end{array} x^3 ** - b^3c \infty 0$. Et supponendo b superare ipsam c, habebit illa eandem formam atque secunda propositio $x^4 - lx^3 ** - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo æquatio, & collatis secundis terminorum habebimus $- b + c \infty - l$, hoc

eſt, $c \infty b - l$. Unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$\begin{array}{l} x^3 + bxx + bbx + b^3 - bbl \infty 0 \\ \quad\;\, - l \quad\;\; - bl \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas uſurpari poſſe. Præterea, comparando poſtremos terminorum, habebimus $p^4 \infty b^3 c$. Unde ſequitur, c æquari $\frac{p4}{b3}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + \frac{p4}{b3} xx + \frac{p4}{bb} x + \frac{p4}{b} \infty 0$ tribus reliquis inſervire.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione formetur ex duabus $x^3 - cxx - bcx - bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio hæc

$$\begin{array}{l} x^4 - cx^3 ** + b^3 c \infty 0, \\ \quad\;\;\, - b \end{array}$$

& erit ejuſdem formæ atque tertia propoſitarum $x^4 - lx^3 ** + p^4 \infty 0$, ac per conſequens eandem habebunt naturam & conſtitutionem. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Unde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{l} x^3 - lxx - blx - bbl + b^3 \infty 0 \\ \quad\;\;\, + b \quad\;\; + bb \end{array}$$

tribus reliquis inſervire. Porrò, comparando poſtremos terminos, habebimus $p^4 \infty b^3 c$, & per conſequens $c \infty \frac{p4}{b3}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 - \frac{p4}{b3} xx - \frac{p4}{bb} x - \frac{p4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas radices inveſtigandas adhiberi.

Non operæ pretium duximus meminiſſe æquationum quatuor dimenſionum, in quibus ſecundus & quartus terminus deſunt: quia illæ omnes reducuntur ad Quadratas, ac idcirco earum natura & conſtitutio eodem modo habetur.

Ca-

CAPUT VIII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo termino carentium.

ÆQuationes hæ reducuntur ad septem formas sequentes:

$$x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione duarum $x^3 + bxx - ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * \begin{matrix} -ccxx \\ -bb \end{matrix} \begin{matrix} +d^3x \\ +bcc \end{matrix} - bd^3 \infty 0.$ quæ eandem habebit formam atque prima propositarum $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc + bb$, hoc est, $cc \infty mm - bb$. Deinde, comparando terminos quartos, erit $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty n^3 + b^3 - bmm$. Unde comperimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{matrix} -mmx \\ +bb \end{matrix} \begin{matrix} +n^3 \\ +b^3 \\ -bmm \end{matrix} \infty 0$ tribus reliquis indagandis inservire. Præterea, conferendo inter se terminos ultimos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. Unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{matrix} -mmx \\ +bb \end{matrix} + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas quærendas adhiberi posse.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda fiat ex multiplicatione $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ per $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * \begin{array}{l} + ccxx \\ - bb \end{array} \begin{array}{l} + d^3x \\ - ccb \end{array} - d^3b \infty 0.$

Suppoſito verò cc majore quàm bb, & ccb majore quàm d^3, habebit illa eandem formam cum ſecunda propoſitarum $x^4 * + mm\,xx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat igitur adæquatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc eſt, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $-ccb + d^3 \infty -n^3$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty bmm + b^3 - n^3$. Unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l} + mmx \\ + bb \end{array} \begin{array}{l} + bmm \\ + b^3 \\ - n^3 \end{array} \infty 0$, tribus reliquis inveſtigandis inſervire.

Præterea, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx \begin{array}{l} + mmx \\ + bb \end{array} + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas poſſe uſurpari.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia, fiat ex duabus his $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 * \begin{array}{l} + ccxx \\ - bb \end{array} \begin{array}{l} + d^3x \\ - ccb \end{array} - d^3b \infty 0$. Et, ſuppoſito bb majore quàm cc, & ccb majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque tertia propoſitio $x^4 * - mm\,xx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Unde factâ adæquatione, ex collatione tertiorum terminorum habebimus $-mm \infty -bb + cc$, hoc eſt, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $-n^3 \infty -ccb + d^3$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty b^3 - bmm - n^3$. unde patet, ſi cognita ſit radix vera b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l} + bbx \\ - m^2 \end{array} \begin{array}{l} + b^3 \\ - bm^2 \\ - n^3 \end{array} \infty 0$

tri-

tribus reliquis investigandis inservire. Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bd^3$, ac proinde $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 + bxx + \begin{array}{l}+bbx\\-mm\end{array} + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres investigandas usurpari.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum formemus ex duabus $x^3 + bxx + ccx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 * + \begin{array}{l}ccxx\\-bb\end{array} + \begin{array}{l}d^3x\\-ccb\end{array} - d^3b \propto 0$. Et supposito cc majore quàm bb, ac d^3 majore quàm ccb, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \propto cc - bb$, hoc est, $cc \propto mm + bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 - ccb$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto b^3 + bmm + n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + \begin{array}{l}mmx\\+bb\end{array} \begin{array}{l}+b^3\\+bmm\\+n^3\end{array} \propto 0$ tribus reliquis quærendis inservire. Denique, collatis ultimis terminis, erit $d^3b \propto p^4$; & per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 + bxx + \begin{array}{l}mmx\\+bb\end{array} + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres indagandas erit adhibenda.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus $x^3 + bxx - ccx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 * \begin{array}{l}-ccxx\\-bb\end{array} \begin{array}{l}-d^3x\\+bcc\end{array} + d^3b \propto 0$. Et supposito bcc majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \propto cc + bb$, hoc

hoc eſt, $cc \infty mm - bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty bcc - d^3$; ideoque, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty bmm - b^3 - n^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & - bmm & \infty\ 0 \\ & + bb & + b^3 & \\ & & + n^3 & \end{array}$$

reliquis tribus quærendis inſervituram. Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $d^3 b \infty p^4$. Unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lll} x^3 + bxx & - mmx - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ & + bb & \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas poſſe adhiberi.

6 Propoſitio.

Pro ſexta propoſitione formemus ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 * & + ccxx & - d^3x & + d^3b \infty 0. \\ & - bb & - ccb & \end{array}$$

& ſupponendo cc majus quàm bb, habebit ipſa eandem formam cum ſexta propoſitarum $x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens erit utraque ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc eſt, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty n^3 - bmm - b^3$. Unde patet, datâ verâ radice b, æquationem

$$\begin{array}{lll} x^3 + bxx & + mmx & \\ & + bb & \\ & - n^3 & \infty\ 0 \\ & + bmm & \\ & + b^3 & \end{array}$$

ad trium reliquarum inveſtigationem poſſe uſurpari.

Poſtremò, comparando ultimos terminos, erit $p^4 \infty d^3b$, unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lll} x^3 + bxx & + mmx - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ & + bb & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas eſſe adhibendam.

I Propositio.

Pro septima propositarum fiat ex duabus $x^3+bxx+ccx-d^3 \infty 0$ & $x-b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * + ccxx - d^3x + bd^3 \infty 0$. Et sup-
$\quad\quad -bb \quad -bcc$
posito bb majore quàm cc, habebit ipsa eandem formam atque septima propositio $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $-mm \infty -bb + cc$, hoc est, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty n^3 - b^3 + bmm$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx - n^3 \infty 0$ ad reliquas tres
$\quad\quad -mm \quad + b^3$
$\quad\quad\quad\quad -bmm$
investigandas utilem esse. Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde discimus, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx - \frac{p^4}{b} \infty 0$
$\quad\quad -m^2$
ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

CAPUT IX.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, quarto termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur omnes ad septem sequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad investigandam naturam & constitutionem primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx + ddx + bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquationem hanc

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -cx^3 & +ddxx & * & -bbdd & \infty\, 0 \\ & -b & +bc & & & \end{array}$$

habebitque ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$, & per consequens duæ illæ æquationes ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, seu $c \infty l - b$. Deinde, comparando tertios terminos, erit $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty mm - bl + bb$. unde constat, si cognoscitur vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & +mmx & +bmm & \infty\, 0 \\ & +b & -bl & -bbl & \\ & & +bb & +b^3 & \end{array}$$

ad reliquas tres investigandas inservire.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione formemus ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem

$$\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & * & -ddbb & \infty\, 0 \\ & -b & -bc & & & \end{array}$$

Suppositâ verò c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, erit $-mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty bl + bb - mm$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +lxx & +blx & +bbl & \infty\, 0 \\ & +b & +bb & +b^3 & \\ & & -m^2 & -bm^2 & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas posse adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$, unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cùm cognoscitur vera radix

radix b, hanc æquationem $x^3 + lxx + blx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tres reli-
$$\begin{array}{llll} & +b & +bb & \\ & & -mm & \end{array}$$
quas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione, fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + cx^3 + ddxx * - bbdd \infty 0$. Sup-
$$\begin{array}{ll} -b & -bc \end{array}$$
positis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $-l \infty c - b$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $-mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty bb - bl - mm$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx - bbl \infty 0$
$$\begin{array}{lll} -l & -bl & +b^3 \\ & -m^2 & -bm^2 \end{array}$$
tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bbdd$, unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; & , cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b}$ pro tribus reliquis usurpari.
$$\begin{array}{ll} -l & -bl \\ & -mm \end{array}$$

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + cx^3 + ddxx * - bbdd \infty 0$. Sup-
$$\begin{array}{ll} -b & -bc \end{array}$$
positis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$, ac per consequens duæ illæ æquationes eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Dein-

 de,

de, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bl + bb$. unde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + l\,xx & + mm\,x & + bmm & \infty\ o \\ \ \ + b & + bl & + bbl & \\ & + bb & + b^3 & \end{array}$$

ad tres reliquas adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$. unde ſequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + b\,xx & + mm\,x & + \frac{p^4}{b} & \infty\ o \\ \ \ + l & + bl & & \\ & + bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas eſſe utilem.

5 *Propoſitio.*

Pro quinta propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - bdd \infty o$ & $x - b \infty o$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - c\,x^3 & - dd\,xx * & + bbdd & \infty\ o. \\ \ \ - b & + bc & & \end{array}$$

Et ſupponendo bc majus quàm dd, erit ipſa ejuſdem formæ cum quinta propoſitione $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty o$, ac per conſequens eandem habebunt naturam & conſtitutionem. Fiat jam adæquatio, & comparatis ſecundis terminis, habebimus $l \infty b + c$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc eſt, reſtituendo valorem inventum c, erit $dd \infty bl - bb - mm$. unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - l\,xx & - bl\,x & - bbl & \infty\ o \\ \ \ + b & + bb & + bmm & \\ & + mm & + b^3 & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas adhiberi poſſe.

Poſtremò, comparando ultimos terminos, habebimus $bbdd \infty p^4$, ac per conſequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 - l\,xx & - bl\,x & - \frac{p^4}{b} & \infty\ o \\ \ \ + b & + bb & & \\ & + mm & & \end{array}$$

pro tribus reliquis inveſtigandis inſervire poterit.

6 *Pro-*

6 *Propositio.*

Pro sexta propositarum, fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 + cx^3 - ddxx * + bbdd \propto 0$.
$-b \quad -bc$

Supponendo autem c majorem quàm b, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, ex collatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \propto dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \propto mm - bl - bb$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$x^3 + lxx - mmx - bmm \propto 0$ tres reliquas radices respicere.
$+b \quad +bl \quad +bbl$
$+bb \quad +b^3$

Postremò, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \propto bbdd$, ac per consequens $dd \propto \frac{p^4}{bb}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 + lxx - mmx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres
$+b \quad +bl$
$+bb$
reliquas investigandas erit adhibenda.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 - ddxx * + bbdd \propto 0$.
$-b \quad -bc$

Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam atque septima propositarum $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c - b \propto -l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \propto dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto mm - bb + bl$. unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx - mmx - bmm \propto 0$
$-l \quad -bl \quad -bbl$
$+bb \quad +b^3$

 tri-

tribus reliquis inservire. Denique, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \propto bbdd$, ac per consequens $dd \propto \frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & - mmx & - \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & - l & - bl & \\ & & + bb & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

CAPUT X.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, tertio termino carentium.

Reducuntur autem hæ æquationes ad septem sequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 * + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 * - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 * + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \propto 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx - bcx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 & - cx^3 * & + d^3x & - bd^3 \propto 0, \\ & - b & + bbc & \end{array}$$

& habebit ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 * + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem inventum c, erit $d^3 \propto n^3 - bbl + b^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & - lxx & - blx & + n^3 \propto 0 \\ & + b & + bb & + b^3 \\ & & & - bbl \end{array}$$

ad tres reliquas quærendas adhiberi posse. Denique, comparando ulti-

ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty b d^3$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio
$$\begin{array}{l} x^3 - lxx - blx + \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \qquad\;\; + b \quad\; + bb \end{array}$$
ad reliquas tres erit referenda.

2 Propositio.

Pro secunda propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio
$$\begin{array}{l} x^4 + cx^3 * + d^3x - d^3b \infty 0. \\ \qquad\; - b \qquad\; - bbc \end{array}$$
Suppositis autem c majore quàm b, & bbc majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque secunda propositio $x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus, $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $d^3 - bbc \infty - n^3$, hoc est, substituendo valorem c inventum, erit $d^3 \infty bbl + b^3 - n^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{l} x^3 + lxx + blx + bbl \infty 0 \\ \qquad\; + b \quad + bb \;\; + b^3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; - n^3 \end{array}$$
tribus reliquis inservire. Postremò, per comparationem ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty b d^3$, ac per consequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio
$$\begin{array}{l} x^3 + lxx + blx + \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \qquad\; + b \quad\; + bb \end{array}$$
ad tres reliquas investigandas erit utilis.

3 Propositio.

Pro tertia propositione fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio
$$\begin{array}{l} x^4 + cx^3 * + d^3x - d^3b \infty 0. \\ \qquad\; - b \qquad\; - bbc \end{array}$$
Suppositis autem b majore quàm c, & bbc majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat itaque earum adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $- l \infty c - b$, hoc est, $c \infty - l + b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $d^3 - bbc \infty - n^3$, hoc est,

restí-

restituendo valorem c inventum, erit $d^3 \infty -lbb + b^3 - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & -lbb \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & & -n^3 \end{array} \infty\ 0$$

ad reliquas tres quærendas esse utilem. Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3 b$, ac per consequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & +\frac{p^4}{b} \\ & +b & +bb & \end{array} \infty\ 0$$

ad tres reliquas erit referenda.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 & +cx^3 * & +d^3x & -d^3b \\ & -b & & -bbc \end{array} \infty\ 0.$$

Suppositis autem c majore quàm b, & d^3 majore quàm bbc, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositarum $x^4 + lx^3 * + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty b + l$. Deinde, comparando quartos terminos, habebimus $n^3 \infty d^3 - bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 + b^3 + bbl$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +n^3 \\ & +l & +bl & +b^3 \\ & & & +bbl \end{array} \infty\ 0$$

ad tres reliquas esse referendam.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3 b$, ac per consequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} \\ & +l & +bl & \end{array} \infty\ 0$$

tribus reliquis inserviet.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 & -cx^3 * & -d^3x & +bd^3 \\ & -b & & +bbc \end{array} \infty\ 0.$$

Supponendo autem bbc majus quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque

atque quinta propositio $x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \infty o$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bbc - d^3$, hoc est, $d^3 \infty bbl - b^3 - n^3$, substituto nempe valore c invento. Unde patet, cùm innotescit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - bbl & \infty o \\ \quad + b & + bb & + b^3 & \\ & & + n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - \frac{p^4}{b} & \infty o \\ \quad + b & + bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas esse adhibendam.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty o$ & $x - b \infty o$, æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 + cx^3 * & - d^3x & + bd^3 & \infty o. \\ \quad - b & - bbc & & \end{array}$$

Supposità autem c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositarum $x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \infty o$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - bbl - b^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & - n^3 & \infty o \\ \quad + b & + bb & + bbl & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & - \frac{p^4}{b} & \infty o \\ \quad + b & + bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres esse referendam.

1 Propositio.

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{matrix} +c \\ -b \end{matrix} x^3 * \begin{matrix} -d^3 \\ -bbc \end{matrix} x + bd^3 \infty 0$. Supponendo autem b majorem quàm c, habebit ipsa eandem formam atque septima propositarum $x^4 - lx^3 * - mx + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $c - b \infty - l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - b^3 + bbl$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{matrix} +b \\ -l \end{matrix} xx \begin{matrix} +bb \\ -bl \end{matrix} x \begin{matrix} -n^3 \\ -bbl \\ +b^3 \end{matrix} \infty 0$ reliquis tribus inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde constat, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 \begin{matrix} +b \\ -l \end{matrix} xx \begin{matrix} +bb \\ -bl \end{matrix} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

CAPUT XI.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, in quibus nullus terminus deest.

REducuntur hæ æquationes omnes ad quindecim sequentes formas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$

$x^4 -$

$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$
$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$
$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$
$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$
$x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$
$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$
$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis dignoscendâ fiat ex duabus hisce, $x^3 - cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{smallmatrix} -cx^3 \\ -b \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} +ddxx \\ +bc \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} -f^3x \\ -bdd \end{smallmatrix} + bf^3 \infty 0$, quæ eandem habebit formam atque prima propositarum $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bl + bb$. Tum per collationem quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, substituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl - bmm - b^3$. Unde constat, cùm innotescit vera radix b, hanc æquationem $x^3 \begin{smallmatrix} -lxx \\ +b \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} +mmx \\ +bb \\ -bl \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} -n^3 \\ -bbl \\ +bm^2 \\ +b^3 \end{smallmatrix} \infty 0$ tribus reliquis inservire.

Postremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{smallmatrix} -lxx \\ +b \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} +mmx \\ +bb \\ -bl \end{smallmatrix} - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{smallmatrix} -cx^3 \\ -b \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} -ddxx \\ +bc \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} -f^3x \\ +bdd \end{smallmatrix} + bf^3 \infty 0$.

Suppositis autem bc majore quàm dd, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty bl - bb - mm$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty bbl - b^3 - bmm - n^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +n^3 \infty 0 \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & -bl & +bmm \\ & & & -bbl \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas posse adhiberi.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$, & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & -f^3x & +bf^3 \infty 0. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc, & f^3 majore quàm bdd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $bc - dd \infty - mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty bl + mm - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $bdd - f^3 \infty - n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl + bmm - b^3$. Unde constat, cognitâ verâ rádice b, hanc æqua-

æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & -bl\,x & -n^3 & \infty\ 0 \\ & +b & -mm & -bbl & \\ & & +bb & -bm^2 & \\ & & & +b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty\ bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ & +b & -bl & & \\ & & +bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty\ 0$ & $x - b \infty\ 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & -f^3x & +bf^3 & \infty\ 0. \\ & -b & +bc & +bdd & & \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty\ 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $c \infty\ l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $bc - dd \infty\ -mm$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty\ mm + bl - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty\ bdd - f^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty\ bmm + bbl - b^3 - n^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & -mmx & -bmm & \infty\ 0 \\ +b & -bl & -bbl & & \\ & +bb & +b^3 & & \\ & & +n^3 & & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty\ bf^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} & \infty\ 0. \\ & +b & -bl & & \\ & & +bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, formemus ex duabus, $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hanc æquationem $x^4 + cx^3 + ddxx - f^3x$
$\quad - b \quad - bc \quad - bdd$
$+ bf^3 \infty 0$. Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos, habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty mm + bl + bb$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc est, restituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 - mmb - bbl - b^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0$ tribus reliquis inservire.
$+ b \quad + bl \quad + m^2b$
$\quad + bb \quad + bbl$
$\quad + b^3$

Denique, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty p^4$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + lxx + mmx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres
$+ b \quad + bl$
$\quad + bb$
reliquas esse referendam.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 - bx^3 - bcxx - bddx + bf^3 \infty 0$.
$+ c \quad + dd \quad - f^3$
Suppositis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty - mm$, hoc est, substituto valore c inven-

invento, erit $dd \propto bl + bb - mm$. Tum, comparando quartos terminos, habebitur $n^3 \propto f^3 + bdd$, hoc est, restituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + bmm - b^3 - bbl$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & - n^3 & \propto 0\\ \quad + b & + bb & - bmm & \\ & - mm & + bbl & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & - \frac{p^4}{b} & \propto 0\\ \quad + b & + bb & & \\ & - mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & - ddxx & - f^3x & + bf^3 & \propto 0.\\ \quad - b & - bc & + bdd & & \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque septima propositio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto b + l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \propto dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm - bb - bl$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \propto bdd - f^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto bmm - b^3 - bbl - n^3$. Unde sequitur, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & - bmm & \propto 0\\ \quad + l & + bb & + b^3 & \\ & + bl & + bbl & \\ & & + n^3 & \end{array}$$

reliquis tribus inservire.

Postremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bf^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æqua-

tio-

tionem $\begin{array}{l} x^3 + bxx - mmx - \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ \quad\;\; + l \quad\;\; + bb \\ \qquad\qquad\; + bl \end{array}$ ad reliquas tres esse referendam.

8 *Propositio.*

Pro octava propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $\begin{array}{l} x^4 - cx^3 + ddxx + f^3x - f^3b \propto 0. \\ \quad\;\; - b \quad\; + bc \quad\;\; - bdd \end{array}$

Supposito autem bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque octava propositio $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \propto dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm - bl + bb$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bdd \propto - n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto bmm - bbl - n^3 + b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{l} x^3 - lxx + mmx + bmm \propto 0 \\ \;\; + b \quad\; + bb \quad\; + b^3 \\ \qquad\quad - bl \quad\; - bbl \\ \qquad\qquad\qquad - n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto bf^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{l} x^3 - lxx + mmx + \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ \;\; + b \quad\; + bb \\ \qquad\quad\; - bl \end{array}$ ad tres reliquas esse referendam.

9 *Propositio.*

Pro nona propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $\begin{array}{l} x^4 - cx^3 + ddxx + f^3x - f^3b \propto 0. \\ \quad\;\; - b \quad\; + bc \quad\;\; - bdd \end{array}$

Supposito verò f^3 majore quàm bdd, erit ipsa ejusdem formæ cum propositione nona $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per con-

consequens habebunt duæ illæ æquationes eandem naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \propto b+c$, hoc est, $c \propto l-b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebitur $mm \propto dd + bc$, hoc est, subrogato valore c invento, erit $dd \propto mm + bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, fiet $n^3 \propto f^3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + b^3 + bmm - bbl$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +n^3 \propto 0 \\ & +b & +bb & +bmm \\ & & -bl & +b^3 \\ & & & -bbl \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $f^3b \propto p^4$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

10 Propositio.

Pro decima propositione fiat ex duabus hisce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b \propto 0 \\ & -b & -bc & -bd^2 & \end{array}$$

Suppositis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque decima propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $c - b \propto -l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \propto -mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto bb - bl - mm$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bdd \propto -n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto b^3 - bbl - bmm - n^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +b^3 \propto 0 \\ & -l & -bl & -bbl \\ & & -m^2 & -bmm \\ & & & -n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty bf^3$. unde constat, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & -l & -bl & \\ & & -mm & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

11 *Propositio.*

Pro undecima propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & -ddxx & +f^3x & -bf^3 \infty 0. \\ & -b & -bc & +ddb & \end{array}$$

Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam atque undecima propositio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$; ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm - bb + bl$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebitur $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc est, substituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 - mmb + b^3 - bbl$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -mmx & +n^3 \infty 0 \\ -l & +bb & -bbl & \\ & -bl & -mmb & \\ & & +b^3 & \end{array}$$

reliquis tribus inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $bf^3 \infty p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -mmx & +\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & -l & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad reliquas tres esse referendam.

12. *Propositio.*

Pro duodecima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b \infty 0. \\ & -b & -bc & -bdd & \end{array}$$

Suppo-

Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque duodecima propositio $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde conferendo secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd - bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bb + bl$. Tum comparando quartos terminos habebimus $f^3 - bdd \infty - n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm + bbl + b^3 - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \infty 0 \\ + l & + bl & + bbl & \\ & + mm & + bm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis postremis terminis, habebimus $bf^3 \infty p^4$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty 0 \\ + l & + bl & & \\ & + mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

13 *Propositio.*

Pro decima tertia propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & + ddxx & + f^3x & - f^3b & \infty 0. \\ - b & - bc & - bdd & & \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non f^3 majore quàm bdd, habebit ipsa eandem formam atque decima tertia propositio $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis, habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, restituto valore c invento, erit $dd \infty mm + bb + bl$. Tum, comparatis quartis terminis, habebimus $n^3 \infty f^3 - bdd$; hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + b^3 + bbl + bmm$. Unde constat, cognitâ

verâ

vera radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & + bxx & + bbx & + b^3 & \infty\ 0 \\ & + l & + bl & + bbl & \\ & & + m^2 & + n^3 & \\ & & & + bm^2 & \end{array}$$
reliquis tribus inservire.

Postremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty\ p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ & + l & + bl & & \\ & & + mm & & \end{array}$$
ad reliquas tres esse referendam.

14 *Propositio.*

Pro decima quarta propositione formemus ex duabus hisce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty\ 0$ & $x - b \infty\ 0$ hanc æquationem
$$\begin{array}{llllll} x^4 & + cx^3 & + ddxx & + f^3x & - f^3b & \infty\ 0. \\ & - b & - bc & - bdd & & \end{array}$$
Suppositis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque decima quarta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty\ 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty\ c - b$, hoc est, $c \infty\ l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty\ -mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty\ bb + bl - mm$. Tum collatis quartis terminis habebitur $f^3 - bdd \infty\ -n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty\ b^3 + bbl - bmm - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & + bxx & + bbx & + b^3 & \infty\ 0 \\ & + l & + bl & + bbl & \\ & & - m^2 & - bm^2 & \\ & & & - n^3 & \end{array}$$
tribus reliquis inservire.

Denique, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $p^4 \infty\ f^3b$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ & + l & + bl & & \\ & & - m^2 & & \end{array}$$
ad tres reliquas esse referendam.

15 Pro-

15 *Propositio.*

Pro decima quinta & ultima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & - ddxx & + f^3x & - bf^3 \propto 0. \\ \quad - b & - bc & + bdd & \end{array}$$

Suppositâ verò c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam atque decima quinta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, conferendoque secundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \propto dd + bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm - bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, habebitur $n^3 \propto f^3 + bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto b^3 + bbl + n^3 - bmm$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \propto 0 \\ \quad + l & + bl & + bbl & \\ & - mm & + n^3 & \\ & & - bm^2 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto f^3b$, ac per consequens $f^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ \quad + l & + bl & \\ & - mm & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

OBSERVANDA

hic in genere nonnulla.

1. NOtandum, nos in omnibus præcedentibus adæquationibus supponere æquationes comparatas inter se habuisse æque multas radices, aut veras, aut falsas, aut imaginarias. Et ad dignoscendas imaginarias à reliquis, inserviet Tractatus Dioristicus, quem subjungere animus est.

2. Quòd si diligenter perpendantur ea, quæ præcedunt, pa-

 tebit,

tebit, mutatis signis terminorum locorum parium, ut 2di, 4ti, &c. non mutatis signis reliquorum, (comprehendendo sub terminorum numero etiam locos vacantes:) secundum terminum semper æquari summæ radicum æquationis, affectarum cum suis signis + & —; tertium verò, summæ productorum earundem radicum, cùm singulæ binæ in se invicem ducuntur: & quartum, summæ productorum multiplicationis, factæ ex singulis ternis, atque sic deinceps.

Unde sequitur, deficiente secundo termino, ipsam falsam summamvé falsarum radicum æquari ipsi veræ vel verarum summæ; &, deficiente tertio termino, productum vel summam productorum ex binis, per signum + vel — designatorum, æquari summæ productorum vel ei, quod ex reliquis binis producitur ac cum contrario signo afficitur, & sic de cæteris.

Primum Exemplum. Fiat ex multiplicatione $x - b \propto 0$ per $x + c \propto 0$ hæc æquatio $xx \begin{array}{l} -bx \\ +cx \end{array} - bc \propto 0$. Quare mutatis signis secundi termini ac retento signo tertii, habebimus $xx \begin{array}{l} +bx \\ -cx \end{array} - bc \propto 0$. Unde apparet, $b - c$ esse summam radicis veræ $+b$ & falsæ $-c$; & $-bc$ esse productum ex multiplicatione falsæ $-c$ per veram $+b$.

Secundum Exemplum. Fiat deinde alia æquatio $xx \begin{array}{l} -bx \\ -cx \end{array} + bc \propto 0$, ex multiplicatione $x - b \propto 0$ per $x - c \propto 0$. Quare mutatis signis secundi termini, retento signo tertii, habebitur $xx \begin{array}{l} +bx \\ +cx \end{array} + bc \propto 0$. Unde apparet, $+b+c$ esse summam duarum verarum radicum, & $+bc$ esse productum ex earum multiplicatione.

Tertium Exemplum. Fiat ex continua multiplicatione trium radicum $x - b \propto 0$, $x - c \propto 0$, & $x + f \propto 0$ æquatio sequens: $x^3 \begin{array}{l} -bxx \\ -c \\ +f \end{array} \begin{array}{l} +bcx \\ -bf \\ -cf \end{array} + bcf \propto 0$. Quare mutatis signis terminorum loco pari positorum, relinquendo signa reliquorum, habebimus $x^3 \begin{array}{l} +bxx \\ +c \\ -f \end{array} \begin{array}{l} +bcx \\ -bf \\ -cf \end{array} - bcf \propto 0$. Unde apparet, secundum termi-

num

num $+b+c-f$ esse summam verarum radicum $+b$, $+c$, & falsæ $-f$; & tertium terminum $bc-bf-cf$ esse summam trium productorum $+bc$, $-bf$, & $-cf$, prout singulæ binæ radices in se invicem ducuntur; at quartum terminum $-bcf$ esse productum multiplicationis trium radicum $+b$, $+c$, & $-f$. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam f æquari summæ duarum verarum $+b$ & $+c$; &, deficiente tertio termino, producta multiplicationis $-bf$ & $-cf$, signo $-$ affecta, æquari producto $+bc$, signo $+$ affecto.

Quartum Exemplum. Formemus æquationem ex continua multiplicatione trium $x-b \propto 0$, $x-c \propto 0$, & $x-d \propto 0$, quæ sit

$$\begin{array}{llll} x^3 - bxx & + bcx & - bcd \propto 0. \\ - c & + db & \\ - d & + dc & \end{array}$$

Et mutatis signis locorum parium, retentis signis reliquorum, habebimus

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + dcx & + bcd. \\ + c & + bd & \\ + d & + bc & \end{array}$$

Unde perspicimus, secundum terminum $+b+c+d$ esse summam radicum $+b$, $+c$, $+d$; & tertium terminum $+dc+db+bc$ esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum $+bdc$ esse productum multiplicationis omnium trium radicum.

Quintum Exemplum. Fiat ex multiplicatione quatuor $x-b \propto 0$, $x-c \propto 0$, $x-d \propto 0$, & $x+f \propto 0$ sequens æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 - bx^3 & + bcxx & - bcdx & - bcdf \propto 0. \\ - c & + bd & + bcf & \\ - d & + cd & + bdf & \\ + f & - bf & + cdf & \\ & - cf & & \\ & - df & & \end{array}$$

Unde mutatis signis terminorum, locis paribus constitutorum, retentis signis reliquorum, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 + bx^3 & + bcxx & + bcdx & - bcdf \propto 0. \\ + c & + bd & - bcf & \\ + d & + cd & - bdf & \\ - f & - bf & - cdf & \\ & - cf & & \\ & - df & & \end{array}$$

Atque apparet, $+b+c+d-f$ esse summam quatuor radicum æqua-

æquationis; & tertium terminum esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum esse summam productorum ex singulis ternis radicibus; ac denique ultimum terminum esse productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $-f$, in se invicem ductarum. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam radicem $-f$ æquari summæ trium verarum $+b$, $+c$, & $+d$. Et, deficiente tertio termino, summam productorum ex binis, per $-$ designatorum, æquari reliquæ summæ productorum ex binis, cum signo $+$ affectorum. Non secus se res habet cum defecerit quartus.

Sextum & ultimum exemplum. Fingamus quoque ex multiplicatione continua quatuor radicum $x-b \propto 0$, $x-c \propto 0$, $x-d \propto 0$, & $x-f \propto 0$ hanc exurgere æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^4 - bx^3 & + bc\,xx & - bcd\,x & + bcdf & \propto 0. \\ - c & + bd & - bcf & & \\ - d & + cd & - bdf & & \\ - f & + bf & - cdf & & \\ & + cf & & & \\ & + df & & & \end{array}$$

Et mutatis signis locorum parium, retentis reliquis, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 + bx^3 & + bc\,xx & + bcd\,x & + bcdf & \propto 0. \\ + c & + bd & + bcf & & \\ + d & + cd & + bdf & & \\ + f & + bf & + cdf & & \\ & + cf & & & \\ & + df & & & \end{array}$$

Atque apparet, secundum terminum $+b+c+d+f$ esse summam quatuor radicum; tertium terminum $+bc+bd+cd+bf+cf+df$ esse summam productorum multiplicationis ex singulis binis; quartum $+bcd+bcf+bdf+cdf$ esse summam productorum multiplicationis ex singulis ternis; ac denique $+bcdf$ esse productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $+f$, in se invicem ductarum.

CA-

CAPUT XII.

Regula pro inveniendis reliquis Æquationis radicibus, unâ falsarum datâ.

Oportet mutare signa terminorum locorum parium æquationis propositæ, ita ut falsæ radices evadant veræ, & veræ falsæ. Transformatâ hoc pacto æquatione, suppositâque radice datâ pro vera, inveniatur æquatio, reliquis radicibus inveniendis inserviens, sicuti supra docuimus. Atque in æquatione sic inventa mutentur signa terminorum locorum parium, habebimusque æquationem requisito satisfacientem.

Exempli gratiâ. Esto æquationis $x^3 - lxx - mmx + n^3 \propto 0$ falsa radix data, quæ sit b, atque mutatis signis terminorum locorum parium, habebimus $x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0$. Supponatur jam radix falsa b hujus æquationis esse vera, atque ut habeatur æquatio, reliquis duabus radicibus inserviens, consulatur Capitis V. Prop^tio^ 2^da^; & elicientur inde hæ duæ æquationes

$$\begin{array}{l} xx + lx + bb \propto 0 \\ \quad\;\, + b \;\; + bl \\ \qquad\quad\;\; - mm \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{l} xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto 0. \\ \qquad\;\; + l \end{array}$$

Quocirca mutatis utriusque æquationis signis locorum parium, habebimus

$$\begin{array}{l} xx - lx + bb \propto 0 \\ \quad\;\, - b \;\; + bl \\ \qquad\quad\;\; - mm \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{l} xx - bx + \frac{n^3}{b} \propto 0, \\ \qquad\;\; - l \end{array}$$

quarum quælibet quæsito satisfaciet.

CAPUT XIII.

Ad tollendum secundum terminum Æquationum QUADRATARUM.

$xx + lx - mm \propto 0$. Sit $z - \frac{1}{2}l \propto x$, & habebimus $\begin{array}{l} zz * - \frac{1}{4}ll \propto 0. \\ \qquad\;\; - mm \end{array}$

$xx - lx - mm \propto 0$. Sit $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}l + z \propto x, \\ \frac{1}{2}l - y \propto x, \end{array}\right\}$ eritque $\left\{\begin{array}{l} zz * - \frac{1}{4}ll \propto 0. \\ \qquad\;\; - mm \\ yy * - \frac{1}{4}ll \propto 0. \\ \qquad\;\; - mm \end{array}\right.$

$$xx - lx + mm \infty 0.\ \text{Sit} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}l + z \infty x, \\ \frac{1}{2}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{l} zz * - \frac{1}{4}ll \infty 0. \\ \qquad + mm \\ yy * - \frac{1}{4}ll \infty 0. \\ \qquad + mm \end{array} \right.$$

CUBICARUM.

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^3 * & - \frac{1}{3}llz & - \frac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & + m^2 & - n^3 & \\ & & + \frac{1}{3}lm^2 & \\ y^3 * & - \frac{1}{3}lly & + \frac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & + m^2 & + n^3 & \\ & & - \frac{1}{3}lm^2 & \end{array} \right.$$

$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^3 * & - \frac{1}{3}llz & - \frac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & - m^2 & - \frac{1}{3}lm^2 & \\ & & - n^3 & \\ y^3 * & - \frac{1}{3}lly & + \frac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & - m^2 & + \frac{1}{3}lm^2 & \\ & & + n^3 & \end{array} \right.$$

$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^3 * & - \frac{1}{3}llz & - \frac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & + mm & + \frac{1}{3}lm^2 & \\ & & + n^3 & \\ y^3 * & - \frac{1}{3}lly & + \frac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & + m^2 & - \frac{1}{3}lm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array} \right.$$

$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^3 * & - \frac{1}{3}llz & - \frac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & - m^2 & - \frac{1}{3}lm^2 & \\ & & + n^3 & \\ y^3 * & - \frac{1}{3}lly & + \frac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & - m^2 & + \frac{1}{3}lm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array} \right.$$

$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\ z - \frac{1}{3}l \infty x,\ \text{eritque}\ \begin{array}{llll} z^3 * & - \frac{1}{3}llz & + \frac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & - m^2 & + \frac{1}{3}lm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\ z - \frac{1}{3}l \infty x,\ \text{eritque}\ \begin{array}{llll} z^3 * & - \frac{1}{3}llz & + \frac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & + m^2 & - \frac{1}{3}lm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

$x^3 +$

$$x^3+lxx-mmx+n^3\propto 0.\ \text{Sit}\ z-\tfrac{1}{3}l\propto x,\ \text{eritque}\ \begin{array}{llll} z^3 * & -\frac{1}{3}llz & +\frac{2}{27}l^3 & \propto 0. \\ & -m^2 & +\frac{1}{3}lm^2 & \\ & & +n^3 & \end{array}$$

QUADRATO-QUADRATARUM.

$$\begin{array}{r} x^4-lx^3+mmxx- \\ n^3x+p^4\propto 0.\ \text{Esto} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z\propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l-y\propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} x^4-lx^3-mmxx+ \\ n^3x+p^4\propto 0.\ \text{Sit} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z\propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l-y\propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} x^4-lx^3+mmxx+ \\ n^3x+p^4\propto 0.\ \text{Sit} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z\propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l-y\propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} x^4-lx^3-mmxx- \\ n^3x+p^4\propto 0.\ \text{Esto} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z\propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l-y\propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & + \frac{1}{8}l^3z & - \frac{3}{256}l^4 \propto 0. \\ \quad + m^2 & - \frac{1}{2}lm^2 & + \frac{1}{16}llm^2 \\ & - n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 \\ & & + p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & + \frac{1}{8}l^3z & - \frac{3}{256}l^4 \\ \quad - mm & + \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llmm \propto 0. \\ & + n^3 & - \frac{1}{4}ln^3 \\ & & + p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & + \frac{1}{8}l^3z & - \frac{3}{256}l^4 \\ \quad - mm & + \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llmm \propto 0. \\ & - n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 \\ & & + p^4 \end{array}$$

$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$. Esto $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \propto x, \end{array}\right\}$ eritque $\left\{\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & - \frac{1}{8}l^3z & - \frac{3}{256}l^4 \\ \quad + m^2 & + \frac{1}{2}lm^2 & + \frac{1}{16}llm^2 \propto 0. \\ & - n^3 & - \frac{1}{4}ln^3 \\ & & - p^4 \\ y^4 * - \frac{3}{8}llyy & + \frac{1}{8}l^3y & - \frac{3}{256}l^4 \\ \quad + m^2 & - \frac{1}{2}lm^2 & + \frac{1}{16}llm^2 \propto 0. \\ & + n^3 & - \frac{1}{4}ln^3 \\ & & - p^4 \end{array}\right.$

$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$. Esto $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \propto x, \end{array}\right\}$ eritque $\left\{\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & - \frac{1}{8}l^3z & - \frac{3}{256}l^4 \\ \quad - m^2 & - \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llm^2 \propto 0. \\ & + n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 \\ & & - p^4 \\ y^4 * - \frac{3}{8}llyy & + \frac{1}{8}l^3y & - \frac{3}{256}l^4 \\ \quad - m^2 & + \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llm^2 \propto 0. \\ & - n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 \\ & & - p^4 \end{array}\right.$

$x^4 -$

$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$. Esto $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \propto x, \end{array}\right\}$ eritque

$$\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$. Esto $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \propto x, \end{array}\right\}$ eritque

$$\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0 \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +\frac{1}{2}n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

Unde colligere licet, omnes ſuppoſitiones, quæ ad tollendum ſecundum terminum adhibentur, neceſſariò exhibere æquationem realem, modò reales radices adfuerint in æquatione propoſita; & ſi nullæ in his fuerint, id indicio eſſe, nullas quoque eſſe imaginarias in æquatione propoſita. Nam, exempli gratiâ, ſi ſit æquatio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$: patet, ſi radix eſt realis, x neceſſariò debere æqualem eſſe $\frac{1}{4}l$, vel majorem, vel minorem. Si æqualis fuerit $\frac{1}{4}l$, ultimus terminus æquationis transformatæ deficere debet; ſi major fuerit quàm $\frac{1}{4}l$, æquatio transformata denominata à radice z erit realis; ſi denique minor fuerit, transformata æquatio à radice y denominata itidem realis erit.

Quòd ſi ſecundus terminus æquationis propoſitæ afficitur ſigno $+$, ut, exempli gratiâ, ſi ſit $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$: patet, ſi adfuerit radix aliqua realis, ſuppoſitionem hanc $z - \frac{1}{4}l \infty x$ ſemper eſſe neceſſariò realem ac denotare aliquam quantitatem; adeoque transformatam æquationem admittere quoque aliquam radicem.

Deinde conſtat, radices veras æquationum à radice y denominatarum eſſe falſas æquationum à radice z denominatarum; & contra, radices veras æquationum à radice z denominatarum eſſe falſas æquationum à radice y denominatarum.

Caput XIV.

Continens modum tollendi penultimum terminum Æquationum, ſecundo termino carentium.

Pro *Cubicis.* Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^2 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic æquatio transformetur, in qua demum penultimus deficiet terminus.

Pro Quadrato-quadratis. Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^3 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & tum rurſus transformatâ æquatione penultimus terminus deficiet.

Pro æquationibus quinque dimenſionum ſupponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^4 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic in infinitum, transmutatis deinde æquationibus, uti dictum eſt.

Sed

Sed pro æquationibus quatuor dimensionum commodius est, supponere radicem quadratam ultimi termini divisam per incognitam quantitatem R esse æqualem radici incognitæ, atque ita transformare æquationem.

Exemplum Cubicarum. Proponatur $x^3 * + mmx - n^3 \propto 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \propto x$, & , transformatâ æquatione, habebitur $\frac{n^9}{R^6} + \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \propto 0$. Hinc multiplicatis omnibus per R^6, fiet $n^9 + mmn^3 R^4 - n^3 R^6 \propto 0$, adeoque divisis per n^3, fiet $n^6 + mmR^4 - R^6 \propto 0$, hoc est, per transpositionem, habebitur $R^6 - mmR^4 * - n^6 \propto 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione habetur $x \propto \frac{n^3}{R^2}$.

Aliud Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx - n^3 \propto 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \propto x$, fietque $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \propto 0$, hoc est, $R^6 + mmR^4 * - n^6 \propto 0$. æquatio cubica, in qua penultimus terminus deficit, & in qua cùm datur R^2, ex supra posita suppositione habetur x.

Tertium Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx + n^3 \propto 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \propto x$, eritque, transformatâ æquatione, $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} + n^3 \propto 0$, hoc est, $R^6 - mmR^4 * + n^6 \propto 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione id habetur quod requiritur.

Exemplum Quadrato-quadratarum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$. Esto $\frac{p^2}{R} \propto x$, & , transformatâ æquatione, fiet $\frac{p^8}{R^4} - \frac{mmp^4}{R^2} + \frac{n^3pp}{R} - p^4 \propto 0$. Hoc est, multiplicatis omnibus per R^4, habebimus $p^8 - mmp^4R^2 + n^3ppR^3 - p^4R^4 \propto 0$, ac proinde divisis per p^4, habebitur $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 + mmR^2 * - p^4 \propto 0$. æquatio quatuor dimensionum, carens penultimo termino.

Exemplum secundum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$. Supponendo $\frac{pp}{R} \propto x$, transformetur æquatio, fietque $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 + mmR^2 * + p^4 \propto 0$. æquatio in qua penultimus terminus deficit.

Exem-

Exemplum tertium. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$. Supposità $x \infty \frac{pp}{R}$, æquatio transformata erit $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 - mmR^2 * + p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum quartum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, erit transformata æquatio $R^4 + \frac{n^3}{pp} R^3 - mmR^2 * + p^4 \infty 0$, penultimo termino destituta.

Exemplum quintum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Et supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, æquatio transformata erit $R^4 + \frac{n^3}{pp} R^3 - mmR^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum sextum. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Et supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, erit æquatio transformata $R^4 + \frac{n^3}{pp} R^3 + mmR^2 * - p^4 \infty 0$, quæ destituitur penultimo termino.

Exemplum septimum. Proponatur $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, transformata æquatio erit $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 - mmR^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Ex quibus manifestum est, ex omnibus æquationibus auferri posse penultimum terminum, quandoquidem superiùs ostensum est, ex omni æquatione tolli posse secundum, ac modò jam est demonstratum, quo pacto ex æquationibus, secundo termino carentibus, penultimus terminus auferatur. Id quod annotasse operæ pretium duximus, cum Vieta, postquam Capite 1mo de *Æquationum Emendatione* secundum terminum cujusque æquationis tollere docuit, versùs finem ejusdem Capitis affirmet, posse etiam aliquando alios auferri æquationis terminos, atque ex hac nostra quidem methodo constet, quomodo semper penultimus tolli queat.

CA-

CAPUT XV.

Methodus transmutandi Æquationes Cubicas compositas, in quibus secundus terminus deest, in Æquationes Cubicas simplices, quando id fieri potest.

PRoponatur hæc æquatio $x^3 * + 3mmx - n^3 = 0$. Supponamus $zz - zx - mm = 0$, hoc est, $x = \frac{zz - mm}{z}$. Unde, transformatâ æquatione, habebitur
$$\frac{z^6 - 3mmz^4 + 3m^4zz - m^6}{z^3} + \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 = 0,$$
hoc est, multiplicatis omnibus per z^3, invenietur hæc æquatio $z^6 - n^3z^3 - m^6 = 0$, vel $z^6 = n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 = \frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ est æquatio cubica simplex.

Cognitâ autem ejus radice z, erit ex supra positis radix altera $x = \frac{zz - mm}{z}$. Quæ semper est possibilis, cum z major sit quàm m.

Aliter. Supponatur $zz + zx - mm = 0$, eritque $x = \frac{mm - zz}{z}$. Unde transformatâ æquatione habebimus $z^6 + n^3z^3 - m^6 = 0$, hoc est, $z^6 = -n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 = -\frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ rursus æquatio est cubica simplex. Cujus ope, cùm cognoscitur z, habebitur $x = \frac{mm - zz}{z}$, quæ semper erit possibilis.

Proponatur item hæc æquatio $x^3 * - 3mmx - n^3 = 0$, supponaturque $zz - zx + mm = 0$, hoc est, $x = \frac{zz + mm}{z}$. Unde transformatâ æquatione habebimus $\frac{z^6 + 3mmz^4 + 3m^4zz + m^6}{z^3}$
$- \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 = 0$, hoc est, $z^6 - n^3z^3 + m^6 = 0$, seu $z^6 = n^3z^3 - m^6$, cujus radix est $z^3 = \frac{1}{2}n^3 \pm \sqrt{\frac{1}{4}n^6 - m^6}$.

Unde patet, oportere m^6 non majus esse quàm $\frac{1}{4}n^6$, ut æquatio hæc $z^6 \infty n^3z^3 - m^6$ locum obtineat. Nam si majus sit, non posset proposita æquatio $x^3 * -3mmx - n^3 \infty 0$ sic in simplicem cubicam transmutari.

CAPUT XVI.

Methodus generalis, concernens usum secundarum radicum, ad tollenda signa radicalia ex Æquatione proposita.

SI fuerint duæ æquationes, in quibus eadem litera reperitur, licet ipsas reducere comparando cum duabus aliis, in quibus hæc litera pauciores habet dimensiones.

Exempli gratiâ, habeamus hasce duas æquationes $x^3 + bxx - ccx - d^3 \infty 0$ & $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$. Quibus transpositis, habebimus $x^3 \infty - bxx + ccx + d^3$ & $x^3 \infty + lxx - mmx + n^3$, ac per consequens $\begin{array}{llll} lxx & -mmx & +n^3 & \infty 0 \\ b & -cc & -d^3 & \end{array}$, hoc est, $xx \infty \frac{mmx + ccx + d^3 - n^3}{l+b}$. in quâ litera x pauciorum est dimensionum. Atque ut habeatur adhuc alia, multiplicetur tantùm æquatio inventa per x, & invenietur $x^3 \infty \frac{\begin{array}{ll} mmxx & + d^3x \\ cc & -n^3 \end{array}}{l+b}$.

Quæ comparata cum aliqua ex præcedentibus, verbi gratiâ, cum secunda, exhibet sequentem æquationem

$$\begin{array}{llll} +m^2 xx & -n^3x & -ln^3 & \infty 0. \\ +cc & +lm^2 & -bn^3 & \\ -ll & +bm^2 & & \\ -lb & +d^3 & & \end{array}$$

in quâ litera x similiter duarum tantùm est dimensionum. Sed si collata fuisset cum prima æquatione, inventa fuisset alia, ubi x adhuc pauciores habuisset dimensiones, ita ut eligenda sit ad comparationem facillima. Atque sic continuando inveniri hîc possunt duæ aliæ, ubi x est unius dimensionis, & tandem alia ubi prorsus deest. Quod ipsum docet, dari tales æquationes, in quibus litera, quæ in utraque inveniri debet, mutuâ illâ comparatione planè aufertur. Unde apparet, posse quidem aliquando auferri hanc literam, quamvis non diminuatur numerus dimensionum.

Exem-

Exempli gratiâ, si dentur hæ æquationes $xx - bx - cc \infty 0$. & $xx - bx + dd - bb \infty 0$, habebimus $xx - bx \infty cc$, & $xx - bx \infty + bb - dd$, ergo $cc \infty bb - dd$.

Venio jam ad asymmetrias seu irrationales quantitates, pro quibus tollendis, oportet tantùm supponere literas æquales singulis terminis asymmetris æquationis propositæ. Quâ quidem ratione non tantùm obtinebimus æquationem propositam, in qua omnes hæ literæ sunt substitutæ; sed etiam tot alias, quot literæ fuerunt suppositæ. Unde collatis ordine omnibus hisce æquationibus, devenietur ad æquationem, ubi nulla literarum invenitur ac per consequens nullum signum radicale.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $c + \sqrt{C.\,bbx} - \sqrt{dx} \infty 0$. Ad tollendas igitur ejus asymmetrias, ponamus $R \infty \sqrt{C.\,bbx}$, & $z \infty \sqrt{dx}$. Quibus in æquatione propositâ substitutis, habebimus $c + R - z \infty 0$; atque ex reliquis suppositionibus erit $R^3 \infty bbx$, & $zz \infty dx$. Primò, ad tollendum R, habebimus $R \infty z - c$, ideoque $R^3 \infty z^3 - 3czz + 3ccz - c^3$. Atqui est quoque $R^3 \infty bbx$. Quare erit $z^3 - 3czz + 3ccz - c^3 - bbx \infty 0$, & per consequens $z^3 \infty + 3czz - 3ccz + c^3 + bbx$. Sed si multiplicetur superiùs proposita æquatio $zz \infty dx$ per z, habebitur etiam $z^3 \infty dxz$. Ergo erit $3czz \begin{array}{l} -3ccz \\ -dx \end{array} \begin{array}{l} +c^3 \\ +bbx \end{array} \infty 0$, & substituto dx loco zz, habebimus $3cdx \begin{array}{l} -3ccz \\ -dx \end{array} \begin{array}{l} +c^3 \\ +bbx \end{array} \infty 0$, hoc est, $3\begin{array}{l} cc \\ dx \end{array} z \infty 3cdx \begin{array}{l} +bbx \\ c^3 \end{array}$,

seu $z \infty \dfrac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quæ si multiplicetur per z, fiet

$zz \infty \dfrac{3cdxz + bbxz + c^3z}{3cc + dx}$. Sed est quoque $zz \infty dx$. Igitur habebimus $3cdxz + bbxz + c^3z \infty 3ccdx + ddxx$, hoc est, $\dfrac{3ccdx + ddxx}{3cdx + bbx + c^3} \infty z$. Inventa autem est

$z \infty \dfrac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quare habebimus tandem

$$\begin{array}{llll} d^3x^3 & -3ccddxx & +3c^4dx & -c^6 \infty 0. \\ & -6bbcd & -2c^3bb & \\ & -b^4 & & \end{array}$$

In qua æquatione nullus terminus irrationalis reperitur. Quòd si autem alii adhuc reperirentur, oporteret tantùm operando ut supra auferre cæteras literas, cæteris terminis irrationalibus æquales suppositas. Quâ quidem ratione omnes omnino termini irrationales tollentur, calculus verò prolixior evadet.

Necessitas hujus methodi vel hinc patet, quòd, si fuerint plures quatuor terminis irrationalibus, signa radicalia, per methodum à Vieta traditam, Capite quinto de Emendatione Æquationum, tolli non possint.

FINIS.

AD TRACTATUM

DE

LIMITIBUS ÆQUATIONUM

EPISTOLA PRÆLIMINARIS.

Clarissimo Viro

FRANCISCO à SCHOOTEN,

Mathematum in Illustri Leidensi Academia Professori,

ERASMIUS BARTHOLINUS

S. P.

Nisi meminissem, quanto majore animo honestatis fructus in conscientia, quàm in fama reponatur; nequaquam opportunum fuisset, in edendis hisce opusculis Analyticis consilium. Verùm quia communibus magis commodis quàm privatæ jactantiæ studui, eò animus ausus est, deliberato consilio obsequi. Cujus meæ conscientiæ interpretem, non alium magis desidero, quàm te, Vir Clarissime, quem utilitatibus alio-

 rum

rum, plus quàm propriæ laudi, indies deservire, compertum habeo. Venit in mentem studiosum illud otium, quod Leidæ mihi semper emolumento, utrisque deinde solatio erat, cujusq; varietates si oratione repetere vellem, prout animo pleraque obversantur, non dubito quin existimationi hominum diligentia & fides nostra, & in plerisque etiam pietas subjiceretur. Et licèt nesciam, an ullum tempus jucundiùs exegerim; tamen eâ de causâ magnifacio, quòd amicitiæ tuæ, usque ad intimam familiaritatem, capacem me redderet. Neque aliam interpretationem habuit, quòd Leidâ discessurus, Isagogen Cartesianam typis excudendam concinnaveram, ut meam famam cum tuâ extenderem. Quâ de causâ, cum non modò offensas, verùm etiam simultates varias subierim; non ignoro, quæ futura sit de hisce jam edendis sententia. Ne dubites tamen quin omnia æquo animo toleraverim, præsertim quia pietas & obsequium causam junxêre. Quem enim præterit, fatum literatorum? Mihi certè non improvisa est calumniandi vanitas. Est ita naturâ comprobatum, ut benefactis major ex conscientiâ merces, quàm in ore hominum reponatur: nam plerique, tantum suæ detractum iri gloriæ existimant, quantum cesserit alienæ: postremò, ignavissimus quisque aliorum scripta carpere non veretur. Sic contendere pro moribus temporum eruditio est. Quod recordantem, posteritatis magna miseratio subit. Quot enim præclara inventa putas obscurari, propter scelus hoc obtrectandi? Plerique se intra perpetuum silentium tenere amant, potiùs quàm malignitati interpretantium exponi. Ita communem hunc errorem, bonum publicum magnis detrimentis expiabit. Ego aliorum exemplo quidem didici nullam ex meis laboribus sperare laudem; tanta tamen mihi semper fuit reverentia posterûm, ut censuram erroris non tam reformidem quàm inhumanitatis. Sed, ut de pictore

nisi Artifex judicare, ita nisi Mathematicus non satis potest perspicere Mathematica; tua potissimùm sententiæ hæc exponuntur. Eximium habent usum ea quæ sequenti tractatu exponentur, ad numerosam Æquationum resolutionem; ut reliquas utilitates pertranseam, quia Tu eas ignorare non potes. Quare Lectores rogo, ut judiciis parcant, donec penitus omnia inspexerint. Et si qui hæc recusaverint, sciant se nec inventis gratiam adimere, nec mihi laudis conscientiam. Te verò, Vir Clarissime, si offenderint, omnibus commendationibus destituta reputabo. Vale.

POSTE-

POSTERIOR TRACTATUS

DE

LIMITIBUS ÆQUATIONUM,

Seu

Quo pacto ex forma Æquationum affectarum definiri possint limites, intra quos radices veræ debent offendi.

DE

DE LIMITIBUS ÆQUATIONUM.

CAPUT I.

De Æquationum Quadratarum seu duarum dimensionum limitibus.

Prop. 1. $xx - lx + mm \propto 0$.

Per transpositionem erit $mm \propto lx - xx$, & si prima pars fuerit realis, erit etiam altera pars realis, ideoque lx majus quàm xx; & diviso utroque termino per x, erit l major quàm x. Quin & per transpositionem propositæ æquationis habebitur $xx \propto lx - mm$: ideoque altera pars est realis, & lx majus quàm mm. Unde diviso utroque termino per l, erit x major quàm $\frac{mm}{l}$. Quare æquationis propositæ utraque radix x major erit quàm $\frac{mm}{l}$, sed minor quàm l.

Prop. 2. $xx - lx - mm \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $xx \propto lx + mm$, ideoque xx majus erit quàm mm, & x major quàm m, ac proinde mx majus quàm mm. Unde xx minus erit quàm $lx + mx$, adeoque si utraque pars dividatur per x, erit x minor quàm $l + m$. Rursus quoniam xx æquatur $lx + mm$, erit xx majus quàm lx; ac proinde si uterque terminus dividatur per x, erit x major quàm l, & lx majus quàm ll. Hinc cum xx æquetur $lx + mm$, erit xx majus quàm $ll + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Postremò, quandoquidem x major est quàm m, erit lx majus quàm lm, & xx majus quàm $lm + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{lm + mm}$. Unde radix æquationis propositæ erit major quàm maxima harum duarum $\sqrt{ll + mm}$ & $\sqrt{lm + mm}$, sed minor quàm $l + m$.

Prop. 3. $xx + lx - mm \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $xx + lx \propto mm$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ majus erit quàm x. Rursus existente $xx + lx \propto mm$, erit mm majus quàm xx, & m major quàm x, ac proinde mx majus quàm xx. Atqui habemus $xx + lx \propto mm$. Ergo $mx + lx$ majus erit quàm mm. Hinc divisâ utrâque parte per $m + l$, fiet x major quàm $\frac{mm}{l+m}$. Quare inventa est x radix æquationis propositæ major quàm $\frac{mm}{l+m}$, at minor quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

CAPUT II.

De limitibus Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, secundo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 * - mmx + n^3 \propto 0$.

PEr transpositionem habebimus $x^3 \propto + mmx - n^3$, eritque mmx majus quàm n^3. Unde diviso utroque termino per mm, erit x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Deinde per transpositionem erit $mmx - x^3 \propto n^3$, ac per consequens mm majus quàm xx, & m major quàm x. Quare inventa est utraque radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm}$; & minor quàm m.

Prop. 2. $x^3 * - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \propto n^3$, eritque xx majus quàm mm, & x major quàm m. Erit quoque $x^3 - n^3 \propto mmx$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, ac proinde nnx majus quàm n^3. Atqui per transpositionem propositionis habemus $mmx + n^3 \propto x^3$. Quare $mmx + nnx$ majus erit quàm x^3; & divisa utrâque parte per x, erit $mm + nn$ majus quàm xx; ideoque x minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Inventa ergo est x radix æquationis propositæ major quàm m & n; at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Atque liquet, ad evitandam extractionem radicis cubicæ ipsius n^3, quòd loco nn in vinculo assumi possit quantitas aliqua, quæ non sit

sit minor. Id quod non non erit difficile, cognitis nempe tribus dimensionibus ipsius n_3, sumendoque loco nn rectangulum sub duabus quantitatibus; quarum alterutra non sit ipsâ n minor. Eritque hoc ad sequentia notatu dignum.

Prop. 3. $x^3 * + mmx - n_3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 \infty n^3 - mmx$, eritque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Rursus erit $mmx \infty n^3 - x^3$, & consequenter n^3 major quàm x^3, & n major quàm x, ac proinde nnx majus quàm x^3. Sed per transpositionem æquationis propositæ est quoque $x^3 + mmx \infty n^3$. Ergo $mmx + nnx$ majus erit quàm n^3, & divisâ utrâque parte per $nn + mm$, erit x major quàm $\frac{n^3}{nn+mm}$. Inventa itaque est radix x æquationis propositæ esse major quàm $\frac{n^3}{mm+nn}$, sed minor quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n. Possumus etiam loco nn accipere rectangulum duarum maximarum dimensionum ipsius n^3, ut radicis cubicæ extractio evitetur.

Caput III.

De limitibus Æquationum Cubicarum, penultimo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 - lxx * + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + n^3 \infty lxx$, ideoque xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Rursus erit $n^3 \infty lxx - x^3$, & consequenter l major quàm x. Quælibet igitur radicum x æquationis propositæ major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & minor quàm l.

Prop. 2. $x^3 - lxx * - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty n^3$, ideoque x major quàm l. Rursus erit $x^3 - n^3 \infty lxx$, & consequenter x major quàm n, & xx majus quàm nn, & nxx majus quàm n^3. Atqui habemus quoque per transpositionem $lxx + n_3 \infty x^3$. Quare erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Dividatur utraque pars per xx, eritque $l + n$

 major

major quàm x. Inventa itaque est radix x æquationis propositæ major quàm l & n, sed minor quàm $l+n$. Manifestum est quoque ad evitandam extractionem radicis cubicæ ex n^3, quòd loco n sumi possit minor trium dimensionum ipsius n^3, quando x major est; & quando minor perhibetur quàm $l+n$, quòd tunc loco n maxima trium dimensionum ipsius n^3 accipi queat, & sic de reliquis, quibus ob nimiam facilitatem non immoramur.

Prop. 3. $x^3 + lxx * - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 \infty n^3 - lxx$, ac per consequens $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Est etiam $lxx \infty n^3 - x^3$, & consequenter n major quàm x, & nxx majus quàm x^3. Sed habetur $x^3 + lxx \infty n^3$. Ergo $nxx + lxx$ majus erit quàm n^3, hoc est, divisâ utrâque parte per $n+l$, erit xx majus quàm $\frac{n^3}{n+l}$. Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+n}}$, sed minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n. Demonstratur præterea $nnx + lnx$ majus esse quàm n^3, & $nx + lx$ majus quàm nn, & consequenter x major quàm $\frac{nn}{l+n}$, quandoquidem n major est quàm x.

CAPUT IV.

De Æquationibus Cubicis, in quibus omnes termini extant.

Prop. 1. $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$.

PEr transpositionem habebimus $x^3 - lxx \infty n^3 - mmx$. Hinc si x æquetur ipsi l, erit etiam x ipsi $\frac{n^3}{mm}$ æqualis. Ideoque, si vicissim l æquetur ipsi $\frac{n^3}{mm}$, hoc est, $lmm \infty n^3$, erit similiter x radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & $\frac{n^3}{mm}$. Præterea si $x^3 - lxx$ est realis, hoc est, x major quàm l, erit quoque $n^3 - mmx$ realis, & consequenter $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Quòd si autem eadem quantitas $x^3 - lxx$ nihilo minor sit, transponatur proposita æquatio hâc ratione $lxx - x^3 \infty mmx - n^3$. Et quandoquidem supponitur

tur $lxx - x^3$ esse realis, hoc est, l major quàm x, erit $mmx - n^3$ etiam realis, & consequenter major erit x quàm $\frac{n^3}{mm}$. Inventa est itaque radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & ipsi $\frac{n^3}{mm}$, cùm duo hi termini æquantur. Et si unam tantùm habeat aut tres, quælibet earum erit intra hos limites, quando inæquales sunt; si verò æquales, hoc est, $lmm \infty n^3$, substituto lmm loco n^3 in æquatione proposita, & dividendo per $x - l$, cognoscemus eam non habere aliam radicem in hoc casu quàm l.

Prop. 2. $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \infty n^3 - lxx$. Quòd si ergo xx & mm sunt æqualia, erit etiam xx ipsi $\frac{n^3}{l}$ æquale; & si xx majus est quàm mm, erit quoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx; & si xx minus est quàm mm, minus quoque erit $\frac{n^3}{l}$ quàm xx. Inventi itaque sunt duo limites m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, quorum cuilibet æquatur radix æquationis propositæ, si fuerint æquales, hoc est, si lmm æquatur ipsi n^3; aut necessariò inter duos erit, si inæquales fuerint. Eadem est ratio duorum reliquorum limitum n & $\frac{mm}{l}$.

Prop. 3. $x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty mmx + n^3$, ideoque x major quàm l. Rursus cum per transpositionem sit $x^3 - mmx \infty lxx + n^3$, erit xx majus quàm mm, & x major quàm m, & mxx majus quam mmx. Sed per transpositionem est quoque $x^3 - n^3 \infty lxx + mmx$, & per consequens x major quàm n, & nxx majus quàm n^3. Quin & per transpositionem propositæ habetur $lxx + mmx + n^3 \infty x^3$, atque inventum est mxx majus quàm mmx, & nxx majus quàm n^3. Ergo erit $lxx + mxx + nxx$ majus quàm x^3. Quocirca si utraque pars dividatur per xx, erit $l + m + n$ major quàm x. Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quàm l, m, & n, sed minor quàm $l + m + n$.

Prop. 4. $x^3 + lxx + mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + mmx \propto n^3 - lxx$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Sed est quoque $x^3 + lxx \propto n^3 - mmx$, ideoque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. At verò est etiam $lxx + mmx \propto n^3 - x^3$, & consequenter n major quàm x; quare & nnx majus erit quàm x^3, & lnx majus quàm lxx. Atqui est $x^3 + lxx + mmx \propto n^3$. Ergo $nnx + lnx + mmx$ majus erit quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{nn+ln+mm}$. Quare inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{nn+ln+mm}$, at minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, $\frac{n^3}{mm}$, & n.

Prop. 5. $x^3 - lxx + mmx + n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $mmx + n^3 \propto lxx - x^3$, ideoque l major quàm x. Rursus erit $x^3 + n^3 \propto lxx - mmx$, & per consequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, & minorem quàm l. Sed per transpositionem est quoque $x^3 + mmx \propto lxx - n^3$, & consequenter xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Quare & x major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$.

Prop. 6. $x^3 + lxx - mmx + n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + lxx \propto mmx - n^3$, ideoque x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Similiter erit $x^3 + n^3 \propto mmx - lxx$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ major quàm x. Rursus erit $lxx + n^3 \propto mmx - x^3$, & consequenter m major quàm x. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$, sed minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Prop.

Prop. 7. $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty mmx - n^3$. Unde patet, si x æqualis est ipsi l, quòd tunc quoque x ipsi $\frac{n^3}{mm}$ est æqualis. Ideoque si l æquatur ipsi $\frac{n^3}{mm}$, hoc est, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum l & $\frac{n^3}{mm}$; & si inæquales fuerint, neutra ex duabus radicibus æquationis propositæ poterit esse inter hos terminos. Quia videmus, cùm x major est quàm l, tum quoque x majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$; & si minor est quàm l, tum similiter x minorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$. Sed per transpositionem est etiam $x^3 - mmx \infty lxx - n^3$. Hinc si xx æquetur ipsi mm, erit quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$. Ideoque si fuerint hi termini mm & $\frac{n^3}{l}$ æquales, hoc est, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propositæ major erit unoquoque terminorum æqualium m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ erit inter duos ex his terminis. Præterea per transpositionem est quoque $x^3 + n^3 \infty lxx + mmx$, ideoque $lxx + mmx$ majus quàm x^3, & $lx + mm$ majus quàm xx. At x erit realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, si æquatio proposita fuerit realis. Et si æqualis fuerit vel major quàm m, erit & $lx + mx$ majus quàm xx, ac per consequens $l + m$ major quàm x. Quòd si autem minor fuerit quàm m, multo magis $l + m$ major erit quàm x. Porrò ex hac eadem æquatione constat, quòd $lxx + mmx$ etiam majus est quàm n^3. Hinc cum $l + m$ major sit quàm x, ideoque $llx + lmx$ majus quàm lxx; erit quoque $llx + lmx + mmx$ majus quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$. Invenimus igitur, quòd quælibet radicum æquationis propositæ major est quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$, & multo major quàm $\frac{n^3}{ll + 2lm + mm}$, at minor quàm $l + m$. Denique, quoniam $l + m$ major est quàm x, si major fuerit x quàm m, erit inter hosce terminos $l + m$ & m. Quòd si verò m major est quàm x, invenimus, quòd $lxx + mmx$ est majus

jus quàm $n3$, hinc $lmx + mmx$ multo magis erit majus quàm $n3$; adeoque x major quàm $\frac{n3}{lm+mm}$, & consequenter x major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{n3}{lm+mm}$.

Caput V.

De Æquationibus quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 ** - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 \infty n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p4}{n3}$. Sed per transpositionem est quoque $p^4 \infty n^3x - x^4$, & consequenter n^3 major quàm x^3, ac n major quàm x. Ergo utraque radix x æquationis propositæ major erit quàm $\frac{p4}{n3}$, at minor quàm n.

Prop. 2. $x^4 ** - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - n^3x \infty p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & $nnxx$ majus quàm n^3x. Sed est quoque $x^4 - p^4 \infty n^3x$, ideoque x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & $ppxx$ majus quàm p^4. At per transpositionem est etiam $n3x + p^4 \infty x^4$. Ergo $nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4. Hinc divisâ utrâque parte per xx, erit xx minus quàm $nn + pp$, & x minor quàm $\sqrt{nn+pp}$. Invenimus igitur, quod radix æquationis propositæ est major quàm n & p, sed minor quàm $\sqrt{nn+pp}$, ac proinde multo minor quàm $n + p$.

Prop. 3. $x^4 ** + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^4 \infty p^4 - n^3x$, ac per consequens $\frac{p4}{n3}$ major quàm x. Similiter erit $n^3x \infty p^4 - x^4$, & consequenter p^4 majus quàm x^4, & p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4. Sed est præterea $x^4 + n3x \infty p^4$, ideoque $p^3x + n3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p4}{p^3+n3}$. Invenimus itaque, quòd radix æquationis propositæ est major quàm $\frac{p4}{p^3+n^3}$, at minor quàm $\frac{p4}{n3}$ & p.

Ca-

CAPUT VI.

De Æquationibus quatuor dimenſionum, in quibus tertius & quartus terminus deficiunt.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 ** + p^4 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem eſt $x^4 \infty + lx^3 - p^4$, ideoque x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. At verò eſt etiam $p^4 \infty lx^3 - x^4$, & conſequenter l major quàm x. Invenimus igitur, quòd unaquæque duarum radicum æquationis propoſitæ eſt major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l. Hinc quoniam l major eſt quàm x, & lx^3 majus quàm p^4, habebitur $llxx$ majus quàm p^4, & conſequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{ll}$, & x major quàm $\frac{pp}{l}$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 ** - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 \infty p^4$, ideoque x major quàm l. Similiter eſt $x^4 - p^4 \infty lx^3$, & conſequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, ac proinde px^3 majus quàm p^4. Sed eſt etiam $lx^3 + p^4 \infty x^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l + p$ major quàm x. Invenimus igitur, quòd radix x æquationis propoſitæ major eſt quàm l & p, at minor quàm $l + p$.

Prop. 3. $x^4 + lx^3 ** - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 \infty p^4 - lx^3$, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter eſt $lx^3 \infty p^4 - x^4$, ac per conſequens p major quàm x, & px^3 majus quàm x^4. Atqui eſt etiam $x^4 + lx^3 \infty p^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm p^4, & x^3 major quàm $\frac{p^4}{l+p}$. Quare invenimus, quòd radix x æquationis propoſitæ major eſt quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l+p}}$, ſed minor quàm p & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Facillimè verò evitantur extractiones radicum cubicarum, ſumendo terminos paulò majores aut minores, prout neceſſitas requirit. Atque in hoc ca-

su, quoniam x^3 major est quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & p major quàm x, erit pxx majus quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lp+pp}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lp+pp}}$. Præterea, quandoquidem $\frac{p^4}{l}$ majus est quàm x^3, erit $\frac{p^4 x}{l}$ majus quàm x^4, & $lppx$ majus quàm lx^3, quia p major est quàm x. Atqui est $x^4+lx^3 \infty p^4$. Ergo $\frac{p^4 x}{l}+lppx$ majus erit quàm p^4. Hinc, multiplicatâ utrâque parte per l, & divisâ per pp, habebitur $ppx+llx$ majus quàm lpp, & x major quàm $\frac{lpp}{ll+pp}$.

De æquationibus quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus deficiunt, nihil addimus: siquidem illæ ad quadratas referuntur, ita ut ipsarum limites eodem modo quo quadratarum inveniri possint.

CAPUT VII.

De Æquationibus quatuor dimensionum, secundo termino carentibus.

Prop. I. $x^{4*}-mmxx+n^3x-p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem erit $x^4-mmxx \infty p^4-n^3x$. Unde apparet, quòd, si fuerit xx æquale ipsi mm, hoc est, $x \infty m$, etiam x ipsi $\frac{p^4}{n^3}$ sit æqualis futura. Ideoque si fuerit m æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $mn^3 \infty p^4$, radix x æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum m & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam sive tres habuerit, semper erit inter duos hosce terminos. Præterea cognoscitur, si duo hi termini fuerint æquales, hoc est, $mn^3 \infty p^4$, substituto mn^3 loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x-m$, fore, ut non possit habere aliam radicem realem præter m.

Prop. 2. $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - n^3x \infty p^4 - mmxx$. Unde constat, si x æqualis fuerit ipsi n, fore etiam $xx \infty \frac{p^4}{mm}$; hoc est, $x \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$; & si fuerit $n \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$, tunc radicem æquationis fore æqualem cuilibet horum terminorum; & si inæquales fuerint, tunc eam necessariò futuram inter hosce duos. Idem demonstrabitur de duobus reliquis p & $\frac{n^3}{mm}$; nempe si fuerint æquales, radix æquationis propositæ æquabitur unicuique illorum duorum; sin inæquales, necessariò constituetur inter duos, transpositâ scilicet æquatione in hunc modum $x^4 - p^4 \infty n^3x - mmxx$.

Prop. 3. $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^4 - mmxx \infty n^3x + p^4$, ideoque xx majus quàm mm, & x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Sed est etiam $x^4 - n^3x \infty mmxx + p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & nx^3 majus quàm n^3x. Eodem modo est $x^4 - p^4 \infty mmxx + n^3x$, & consequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Atqui per transpositionem est quoque $mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$. Quare $mx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $m + n + p$ major quàm x. Consimili ratione demonstrabitur, quòd $mmxx + nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4, & consequenter $mm + nn + pp$ majus quàm xx. Invenimus ergo, quòd radix x propositæ æquationis major est quàm m, n, & p, at minor quàm $m + n + p$, & $\sqrt{mm + nn + pp}$.

Prop. 4. $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + mmxx \infty p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Similiter est $x^4 + n^3x \infty p^4 - mmxx$, ac per consequens

sequens $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, hoc est, $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Atqui est quoque $mmxx + n^3x \infty p^4 - x^4$, & consequenter p^4 majus quàm x^4, ac p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4, nec non $mmpx$ majus quàm $mmxx$. Sed est etiam $x^4 + mmxx + n^3x \infty p^4$. Quare $p^3x + mmpx + n^3x$ majus est quàm p^4, ac per consequens, divisâ utrâque parte per $p^3 + mmp + n^3$, erit radix x propositæ æquationis major quàm $\frac{p^4}{p^3 + mmp + n^3}$; at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\frac{pp}{m}$, & p.

Prop. 5. $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $n^3x + p^4 \infty mmxx - x^4$, ideoque mm majus quàm xx, & m major quàm x. Similiter est $x^4 + p^4 \infty mmxx - n^3x$, & consequenter x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Præterea est $x^4 + n^3x \infty mmxx - p^4$, ac per consequens xx majus quàm $\frac{p^4}{mm}$, hoc est, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo quamlibet radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm m.

Prop. 6. $x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + mmxx \infty n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed est etiam $x^4 + p^4 \infty n^3x - mmxx$, ac per consequens $\frac{n^3}{mm}$ majus quàm x. Similiter est $x^4 + mmxx + p^4 \infty n^3x$, ideoque n^3 major quàm x^3, & n major quàm x. Invenimus ergo quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n.

Prop. 7. $x^4 * - mmxx - nx^3 + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty n^3x - p^4$. Unde patet,

tet, si xx æquatur ipsi mm, hoc est, $x \infty m$, eandem x fore æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; ac per consequens, si fuerint termini hi m & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis ipsorum; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos m & $\frac{p^4}{n^3}$. Eodem modo per transpositionem est $x^4 - n^3 x \infty mmxx - p^4$. Unde similiter discimus, si x^3 æquatur ipsi n^3, hoc est, $x \infty n$, fore etiam $xx \infty \frac{p^4}{mm}$, hoc est, $x \infty \frac{pp}{m}$. Ideoque si hi termini n & $\frac{pp}{m}$ fuerint æquales, una ex radicibus æquationis propositæ æquabitur singulis eorundem terminorum; sin verò inæquales fuerint, nulla radicum æquationis propositæ inter illos duos constituta erit. Præterea per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty mmxx + n^3 x$, ideoque $mmxx + n^3 x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Porrò, si proposita æquatio est realis, erit x realis, & æqualis, vel major, vel minor quàm n. Si fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $mm + nn$ majus quàm xx, hoc est, x minor erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Si fuerit x minor quàm n, minor etiam erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Quare patet, quamlibet radicum æquationis propositæ necessariò minorem esse quàm $\sqrt{mm + nn}$. Denique existente $x^4 + p^4 \infty mmxx + n^3 x$, erit similiter $mmxx + n^3 x$ majus quàm p^4. Et quia inventa est $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x, erit consequenter $mmx\sqrt{mm + nn}$ majus quàm $mmxx$, ideoque $mmx\sqrt{mm + nn}, + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{mm\sqrt{mm + nn}, + n^3}$. Quare inventus est terminus unus major & alter minor quàm quælibet duarum radicum æquationis propositæ. Atque ita modo sequenti capite observato propositione septimâ demonstrari potest, quòd x major est quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{mmn + n^3}$.

CAPUT VIII.

De Æquationibus quatuor dimensionum, penultimo termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx$. Unde constat, si x est æqualis ipsi l, etiam xx æquari $\frac{p^4}{mm}$, hoc est, $x \infty \frac{pp}{m}$; ideoque si l æqualis est ipsi $\frac{pp}{m}$, hoc est, $lm \infty pp$, erit radix æquationis propositæ æqualis singulis terminorum l & $\frac{pp}{m}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos; sed si fuerint æquales, hoc est, $lm \infty pp$, & $llmm \infty p^4$, substituto $llmm$ loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x - l$, cognoscemus in hoc casu non haberi aliam radicem veram præter l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty p^4 - lx^3$. Unde constat, si fuerit $x \infty m$, etiam $\sqrt{C.} \frac{p^4}{l}$ æquari ipsi x; ideoque si duo termini m & $\sqrt{C.} \frac{p^4}{l}$ sint æquales, erit radix æquationis æqualis singulis horum terminorum; sin verò inæquales fuerint, erit illa necessariò inter duos. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty mmxx - lx^3$. Unde discimus, quòd si x æqualis est ipsi p, fore quoque eam æqualem ipsi $\frac{mm}{l}$: ideoque si termini p & $\frac{mm}{l}$ æquantur, erit radix æquationis æqualis unicuique illorum; sed si inæquales fuerint, erit illa necessariò inter utrosque constituta.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty mmxx + p^4$, ideoque x major

major quàm l. Sed & per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty lx^3 + p^4$, ideoque x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty lx^3 + mmxx$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Præterea per transpositionem propositionis est $lx^3 + mmxx + p^4 \infty x^4$, ideoque $lx^3 + mx^3 + px^3$ majus quàm x^4, & $l + m + p$ majus quàm x. Quare invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l, m, & p, at minorem quàm $l + m + p$. Denique per transpositionem est $x^4 \infty lx^3 + mmxx + p^4$, ideoque x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$. Atqui demonstratum est superiùs x majorem esse quàm l, ac proinde ll minus quàm lx. Multò igitur magis xx majus erit quàm $ll + mm$, & x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$, $\sqrt{\sqrt{m^4 + p^4}}$, & $\sqrt{\sqrt{mmpp + p^4}}$.

Prop. 4. $x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 \infty p^4 - mmxx$, ideoque $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, & $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Similiter est, $lx^3 + mmxx \infty p^4 - x^4$, ac per consequens p major quàm x, & $ppxx$ majus quàm x^4, & $lpxx$ majus quàm lx^3. Sed per transpositionem propositionis est etiam $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$. Quare $ppxx + lpxx + mmxx$ majus erit quam p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{pp + lp + mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$. At verò existente $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$, erit quoque p^4 majus quàm lx^3, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3, & $\sqrt{C.\, \frac{p^4}{l}}$ majus quàm x. Inventa igitur est radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$; at minor quàm $\frac{pp}{m}$, $\sqrt{C.\, \frac{p^4}{l}}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major

jor quàm x. Deinde est $x^4 + p^4 \infty lx^3 - mmxx$, ac per consequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea est $x^4 + mmxx \infty lx^3 - p^4$, ac proinde x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.}\frac{p^4}{l}$. Invenimus igitur, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$ & $\sqrt{C.}\frac{p^4}{l}$, at minorem quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty mmxx - lx^3$, ideoque $\frac{mm}{l}$ majus quàm x. Deinde est $lx^3 + p^4 \infty mmxx - x^4$, ac proinde m major quàm x. Præterea est $x^4 + lx^3 \infty mmxx - p^4$, & consequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{mm}$, hoc est, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty mmxx - p^4$. Unde patet, si x æqualis est ipsi l, ipsam x quoque fore æqualem ipsi $\frac{pp}{m}$; & per consequens, si fuerint termini l & $\frac{pp}{m}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis illorum; & si fuerint inæquales, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos constituta. Eodem modo per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty lx^3 - p^4$. Unde similiter constat, si fuerit x æqualis ipsi m, fore quoque x æqualem ipsi $\sqrt{C.}\frac{p^4}{l}$; ideoque si æquales fuerint m & $\sqrt{C.}\frac{p^4}{l}$, una radicum æquationis propositæ æqualis erit cuilibet horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter illos duos constituta. Porrò per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + mmxx$, unde $lx^3 + mmxx$ majus erit quàm x^4, & $lx + mm$ majus quàm xx. Jam si fuerit æquatio proposita realis,

lis, erit x vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, & $l+m$ major quàm x. Quòd si fuerit x minor quàm m, multo magis ipsa minor erit quàm $l+m$.

Deinde ex eadem æquatione $x^4+p^4 \infty lx^3+mmxx$ etiam constat, quòd lx^3+mmxx majus est quàm p^4. Atqui inventa est $l+m$ major quàm x. Ergo $llxx+lmxx$ majus erit quàm lx^3, & $llxx+lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{ll+lm+mm}$. Hinc cum $llxx+2lmxx+mmxx$ multò majus sit quàm p^4, erit quoque per consequens $lx+mx$ majus quàm pp, & x major quàm $\frac{pp}{l+m}$. Quare invenímus quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\sqrt{\frac{p^4}{ll+lm+mm}}$ & $\frac{pp}{l+m}$, at minorem quàm $l+m$.

Cæterùm quoniam invenimus, quòd x necessariò est minor quàm $l+m$; patet, si x supponitur major quàm m, eam fore inter hos terminos $l+m$ & m. Quòd si m fuerit æqualis aut major quàm x; quoniam lx^3+mmxx majus est quàm p^4, erit & $lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lm+mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$. Quare unaquæque duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$, at minor quàm $l+m$.

CAPUT IX.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum tertio termino carentium.

Prop. 1. $x^4-lx^3 * +n^3x-p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4-lx^3 \infty p^4-n^3x$. Unde patet, quòd si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; ideoque si fuerit l æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, radix æqua-

 tionis

tionis propositæ æqualis erit singulis terminorum l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos. Præterea cognoscimus, quòd, si fuerint hi ultimi termini æquales, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, substituto in æquatione proposita ln^3 loco p^4, & divisâ æquatione per $x - l$, ipsa non possit aliam habere veram radicem quàm l.

$$Prop.\ 2.\ x^4 + lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0.$$

Per transpositionem est $x^4 - n^3 x \infty p^4 - lx^3$. Unde constat, si x æqualis est ipsi n, fore quoque $x^3 \infty \frac{p^4}{l}$, hoc est, $x \infty \sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$; & si fuerit n æqualis ipsi $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, radix æquationis æquabitur singulis horum terminorum; & si fuerint inæquales, erit necessariò inter duos. Deinde per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty n^3 x - lx^3$. Unde patet si fuerit x æqualis ipsi p, fore quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$, hoc est, $x \infty \sqrt{\frac{n^3}{l}}$; ideoque si fuerit p æqualis ipsi $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, radix æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum, & si fuerint inæquales, erit necessariò inter utrosque.

$$Prop.\ 3.\ x^4 - lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0.$$

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty n^3 x + p^4$, ideoque x major quàm l. Eodem modo est $x^4 - n^3 x \infty lx^3 + p^4$, ac proinde x major quàm n, & nx^3 majus quàm $n^3 x$. Similiter est $x^4 - p^4 \infty lx^3 + n^3 x$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Sed per transpositionem est quoque $lx^3 + n^3 x + p^4 \infty x^4$. Quare $lx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l + n + p$ major quàm x. Ergo invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm $l, n,$ & p, at minorem quàm $l + n + p$. Porrò ex hac æquatione $lx^3 + n^3 x + p^4 \infty x^4$ etiam constat, quòd $lx^3 + n^3 x$ est minus quàm x^4: & quandoquidem invenimus l minorem esse quàm x, erit $l^3 x$ minus quàm lx^3, ideoque $l^3 x + n^3 x$ multò minus quàm x^4, & x^3 major quàm $l^3 + n^3$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$ & $\sqrt{\sqrt{ln^3 + p^4}}$.

Prop.

Prop. 4. $x^4 + lx^3 * + n^3x - p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 \infty p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Eodem modo est $x^4 + n^3x \infty p^4 - lx^3$, ac proinde $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter est $lx^3 + n^3x \infty p^4 - x^4$, & per consequens p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4, ac $lppx$ majus quàm lx^3. Sed per transpositionem propositionis est quoque $x^4 + lx^3 + n^3x \infty p^4$. Quare $p^3x + lppx + n^3x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$. Et sic inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $n^3x + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Deinde est $x^4 + p^4 \infty lx^3 - n^3x$, quare erit xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$, hoc est, x major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Sed est quoque $x^4 + n^3x \infty lx^3 - p^4$, ideoque x^3 majus quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Quare invenimus, quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò major est quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty n^3x - lx^3$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx, hoc est, x minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Deinde est $x^4 + lx^3 \infty n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Præterea est $lx^3 + p^4 \infty n^3x - x^4$, & idcirco n^3 major quàm x^3, hoc est, x minor quàm n. Ergo invenimus, unamquamque duarum radicum x æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty n^3x - p^4$. Unde patet, si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; & per consequens, si fuerint hi termini l & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, una ex radicibus æquationis propositæ æqualis erit singulis horum terminorum æqualium l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter ipsos. Deinde per transpositionem est $x^4 - n^3x \infty lx^3 - p^4$. Unde simili modo patet, si x æquatur ipsi n, ipsam x quoque æquari ipsi $\sqrt{C.}\, \frac{p^4}{l}$; ideoque si termini hi n & $\sqrt{C.}\, \frac{p^4}{l}$ æquales fuerint, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter utrosque. Porrò per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3x$, ideoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm x^4, & $lxx + n^3$ majus quàm x^3. Jam si fuerit posita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major vel minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Sin verò minor sit, erit x multò minor quàm $l + n$. Quare utraque duarum radicum propositæ æquationis necessariò minor erit quàm $l + n$. Quin & existente $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3x$, erit quoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4. Atqui invenimus $l + n$ majorem esse quàm x, ac proinde $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx, & $l^3 + lnn + 2lln$ majus quàm lxx, nec non $l^3x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3. Ergo $l^3x + lnnx + 2llnx + n^3x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$. Et quandoquidem cubus ex $l + n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l + n$. Invenimus itaque quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ major est quàm p^4 divisum per cubum ex $l + n$, ut & major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$, at minor quàm $l + n$. Præterea, quoniam $l + n$ major est quàm x, si fuerit x

major

major quàm n, erit necessariò inter hos terminos $l+n$ & n. Quòd si verò n fuerit vel æqualis vel major quàm x, quia lx^3+n^3x majus est quàm p^4, erit & $lnnx+n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{lnn+n^3}$. Ac proinde quælibet radicum æquationis propositæ major erit quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l+n$.

CAPUT X.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum, in quibus nullus terminus deest.

Prop. I. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$.

PEr transpositionem est $lx^3+n^3x \propto x^4+mmxx+p^4$, ideoque lx^3+n^3x majus quàm x^4, & $lxx+n^3$ majus quàm x^3. Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx+nxx$ majus quàm x^3, hoc est, $l+n$ major quàm x; & si x minor quàm n, multò magis minor erit quàm $l+n$. Ergo x necessariò minor erit quàm $l+n$. Deinde ex eadem æquatione $lx^3+n^3x \propto x^4+mmxx+p^4$ constat, esse lx^3+n^3x majus quàm p^4. Sed inventa est $l+n$ major quàm x, ac per consequens $ll+nn+2ln$ majus quàm xx, & $l^3x+lnnx+2llnx$ majus quàm lx^3. Quare erit $l^3x+lnnx+2llnx+n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3+lnn+2lln+n^3}$; & quandoquidem cubus ex $l+n$ major est quàm $l^3+lnn+2lln+n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l+n$. Inventus est itaque terminus unus major & alter minor quàm unaquæque radicum æquationis propositæ, sive hæc duas sive quatuor radices habuerit. Præterea, quoniam invenimus, quòd $l+n$ semper major est quàm x, si ponatur x quoque major quàm n; manifestum est eam esse inter duos terminos $l+n$ & n. Quòd si autem x fuerit æqualis vel minor quàm n, quoniam est lx^3+n^3x majus quàm p^4; erit $lnnx+n^3x$

majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lnn+n^3}$. Ergo unaquæque radicum propositæ æquationis, sive duas, sive tres habuerit, major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l+n$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $mmxx + n^3x + p^4 \propto lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Similiter est $x^4 + n^3x + p^4 \propto lx^3 - mmxx$, ac idcirco x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea est $x^4 + mmxx + p^4 \propto lx^3 - n^3x$, ac per consequens xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Denique est $x^4 + mmxx + n^3x \propto lx^3 - p^4$, & consequenter x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. Quare invenimus, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $lx^3 + mmxx + n^3x \propto x^4 + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx + n^3x$ majus quàm x^4. Jam si proposita æquatio fuerit realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm maxima duarum m & n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx^3 + mx^3 + nx^3$ majus quàm x^4, & $l+m+n$ major erit quàm x, & magis si fuerit x minor quàm maxima duarum m & n. Quare $l+m+n$ erit necessario major quàm x. Præterea m erit aut æqualis, aut major, aut minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis aut major, & quidem x major quàm m, erit radix æquationis propositæ inter hosce terminos $l+m+n$ & m. Quòd si, existente m æquali aut majore quàm n, etiam m sit æqualis vel major quàm x; erit & $lmmx + m^3x + n^3x$

$+n^3x$ æquale aut majus quàm $lx^3+mmxx+n^3x$, ac per consequens majus quàm p^4; ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lmm+m^3+n^3}$. Unde si fuerit m vel æqualis vel major quàm n, erit x necessariò major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm+m^3+n^3}$; & si n fuerit major quàm m, consimili ratione demonstrabitur x etiam necessariò majorem esse minore horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+mmn+n^3}$. Invenimus ergo unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse minore horum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm+m^3+n^3}$, si m vel æqualis vel major fuerit quàm n; aut majorem minore duorum n & $\frac{p^4}{lnn+mmn+n^3}$, si n major sit quàm m; at verò semper minorem quàm $l+m+n$.

Prop. 4. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $lx^3+mmxx \infty x^4+n^3x+p^4$; ideoque lx^3+mmxx majus quàm x^4, & $lx+mm$ majus quàm xx. Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx+mx$ majus quàm xx, & $l+m$ major quàm x; & multò magis, si fuerit x minor quàm m. Ergo x necessariò minor erit quàm $l+m$. Unde si fuerit x major quàm m, erit inter hosce terminos $l+m$ & m. Quòd si x fuerit vel æqualis vel minor quàm m, quandoquidem & lx^3+mmxx majus est quàm p^4; erit $lmxx+mmxx$ majus quàm p^4; ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{lm+mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$. Quare quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$, at minor quàm $l+m$.

Prop.

Prop. 5. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Demonstrabitur ex transpositionibus requisitis n^3x fore majus quàm x^4, ideoque n majorem quàm x; & n^3x majus quàm lx^3, ac proinde $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx; & denique n^3x majus quàm p^4, & per consequens x majorem quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Invenimus itaque terminum unum majorem singulis radicum æquationis propositæ, at verò duos alios minores.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + n^3x \infty x^4 + lx^3 + p^4$, ideoque $mmxx + n^3x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x; & multò magis, si fuerit x minor quàm n. Quare erit $\sqrt{mm + nn}$ semper major quàm x, & x erit inter terminos $\sqrt{mm + nn}$ & n, si major est quàm n. Quòd si fuerit æqualis aut minor quàm n, quoniam est $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, erit quoque $mmnx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Ergo quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{mmn + n^3}$, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$.

Prop. 7. $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Factis transpositionibus requisitis, demonstrabitur esse x minorem quàm m & $\frac{mm}{l}$, at majorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$.

Prop. 8. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty n^3x + p^4 - mmxx$, ideoque si fuerit $x^4 \infty lx^3$, erit $x \infty l$, & $ln^3 \infty n^3x$, & $n^3x + p^4 \infty mmxx$, ac proinde $ln^3 + p^4 \infty mmxx$, & $x \infty \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$. Unde patet, si fuerit $l \infty \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$, hoc est, si habeatur $llmm \infty ln^3 + p^4$; radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$: ac idcirco, substituto in hoc casu in æquatione proposita valore ipsius p^4, nempe $llmm - ln^3$, ipsam esse divisibilem per $x - l$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm lx^3, hoc est, x major quàm l, erit quoque $n^3x + p^4$ majus quàm $mmxx$; & si fuerit lx^3 majus quàm x^4, hoc est, l major quàm x, erit & $mmxx$ majus quàm $n^3x + p^4$. Jam quandoquidem æquatio proposita est realis, erit x realis & vel æqualis, vel major, vel minor quàm p. Quòd si fuerit æqualis vel major quàm p, sitque major quàm l, quoniam tunc $n^3x + p^4$ quoque majus est quàm $mmxx$, erit & $n^3x + p^3x$ majus quàm $mmxx$, & $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ majus quàm x. Ergo in hoc casu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quòd si autem x minori existente quàm l, ipsa sit æqualis vel minor quàm p, quoniam & tunc $n^3x + p^4$ minus est quàm $mmxx$, erit similiter $n^3x + p^3x$ minus quàm $mmxx$, & consequenter $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ minus quàm x. Igitur in hoc casu erit x minor quàm l, & major quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quare universaliter apparet, æquationem propositam non habere præter unam radicem realem ipsi l æqualem, cùm est $llmm \infty ln^3 + p^4$; modò quælibet radicum, sive unam, sive tres habuerit, fuerit semper necessariò inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{n^3 + p^3}{mm}$, & $\sqrt{\frac{n^3p + p^4}{mm}}$.

Prop. 9. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx - n^3x$, ideoque si fuerit $x^4 \infty lx^3$, hoc est, $x \infty l$, erit $mmxx \infty - n^3x + p^4$, & per consequens $mmxx \infty - n^3l + p^4$, & $xx \infty \frac{p^4 - ln^3}{mm}$, & $x \infty \sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$. Quòd si ergo l æqualis est $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$, hoc est, si fuerit $llmm \infty p^4 - ln^3$; radix æquationis propositæ æqualis erit unicuique terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$: ideoque si in hoc casu in æquatione proposita loco p^4 substituatur ejus valor, nempe $llmm + ln^3$, apparebit ipsam dividi posse per $x - l$, atque nullam aliam radicem veram admittere præter l. Si verò x^4 fuerit majus quàm lx^3, hoc est, x major quàm l, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$; & contra, si fuerit l major quàm x, erit etiam $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4. Jam si æquatio proposita est realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm n. Esto igitur, quòd x major quàm l sit vel æqualis vel major quàm n; quare cum & p^4 tunc majus sit quàm $mmxx + n^3x$, erit quoque p^4 majus quàm $mmnx + n^3x$; ideoque $\frac{p^4}{mmn + n^3}$ majus quàm x. Quare in hoc casu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Quòd si x, cùm major est quàm l, minor fuerit quàm n, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$, ideoque multò majus quàm $mmxx + nnxx$, & consequenter $\frac{p^4}{mm + nn}$ majus quàm xx, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$ major quàm x. Quare in hoc casu x erit major quàm l, & minor quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Quòd si verò x, cùm minor est quàm l, vel æqualis fuerit vel major quàm n, erit $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque $mmxx + nnxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{mm + nn}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Ergo in hoc casu erit x minor

minor quàm l, & major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$. Postremò, cùm x minor quàm l, etiam ipsa minor sit quàm n, erit $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, & $mmnx + n^3x$ multò majus quàm p^4, & per consequens x major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$. Igitur x in hoc casu, minor erit quàm l, & major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$.

Quæ cum ita sint, constat universaliter, æquationem propositam non habere nisi unam veram radicem, quæ æqualis est ipsi l, quando est $llmm \infty p^4 - ln^3$, modo unaquæque radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, fuerit semper necessario inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{p^4}{mmn+n^3}$, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$.

Prop. 10. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Factis necessariis transpositionibus, demonstrabitur quòd x major est quàm l, m, n, & p. Deinde erit quoque per transpositionem $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$, & per consequens $lx^3 + mx^3 + nx^3 + px^3$ majus quàm x^4, & $l+m+n+p$ major quàm x. Porrò, quoniam est $x^4 \infty lx^3 + mmxx + n^3x + p^4$, erit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$, ideoque multo magis x major erit quàm $\sqrt{ll+mm}$ & $\sqrt{lm+mm}$. Similiter, cum x^3 major sit quàm $lxx + mmx + n^3$, erit multo magis major quàm $l^3 + m^3 + n^3$, $l^3 + lmm + n^3$, & $2lmm + n^3$, & sic de reliquis terminis, quos substituere licet loco x^3, minores quàm x^3. Sic x^4 majus est quàm $l^4 + m^4 + n^4$, quàm $m^4 + n^4 + p^4$, & sic reliquis. Præterea, quoniam x major est quàm n & p, & $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$, erit $lx^3 + mmxx + nnxx + ppxx$ majus quàm x^4, ideoque $lx + mm + nn + pp$ majus quàm xx aliquâ quantitate; quæ quidem quantitas, etiamsi sit incognita, si appelletur zz, habebitur $lx + mm + nn + pp \infty xx + zz$. Quantitas autem hæc incognita zz necessariò minor erit quàm $mm + nn + pp$, aliàs, ablatis ex duabus partibus æquationis præcedentis, æqualibus, aut minori quantitate ex pri-

ma & majori ex secunda, esset reliqua lx aut æqualis, aut major quàm xx. Quod foret absurdum, quandoquidem x demonstrata est major quàm l. Quare habemus hanc æquationem $xx \infty lx + mm + nn + pp - zz$, quæ erit realis, eritque $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp - zz}$. Manifestum verò est, quòd $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp$ majus est quàm $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp - zz$. Ergo $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$ major erit quàm x, ideoque $\frac{1}{2}l + \sqrt{ll + mm + nn + pp}$ multo magis major erit quàm x; ita ut radix propositæ æquationis necessariò sit inter $\sqrt{ll + mm}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$.

Prop. 11. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 - mmxx \infty p^4 - n^3x$. Unde, si fuerit $x^4 - lx^3 - mmxx \infty 0$, hoc est, omnibus per xx divisis, $xx - lx - mm \infty 0$, erit quoque $p^4 - n^3x \infty 0$. Hoc est, si fuerit $xx \infty lx + mm$, vel $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; erit & $p^4 \infty n^3x$, vel $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Quare constat, si fuerit $\frac{p^4}{n^3} \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc est, xx majus quàm $lx + mm$; erit p^4 etiam majus quàm n^3x, hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Jam existente xx majori quàm $lx + mm$, erit $xx \infty lx + mm$ plus aliquâ quantitate. Quæ quidem quantitas, etiamsi sit incognita, si vocetur zz: habebitur $xx \infty lx + mm + zz$, & $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + zz}$, eritque x major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc casu erit x minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 minus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc est, xx minus quàm $lx + mm$; erit & p^4 minus quàm n^3x, hoc est, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc existente xx minori quàm $lx + mm$,

erit

erit $xx \propto lx + mm$ minus aliquâ quantitate. Quæ si nominetur zz, habebitur $xx \propto lx + mm - zz$, hoc est, $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, eritque x minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Ergo in hoc casu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare universaliter patet, radicem æquationis propositæ æqualem esse ipsi $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, quando $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipsi $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; Sin secus, quamlibet radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, semper esse inter hosce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

Prop. 12. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - p^4 \propto n^3x - lx^3 - mmxx$; ideoque si fuerit $x \propto p$, erit quoque $n^3x \propto lx^3 + mmxx$, & $x \propto \frac{n^3}{lp + mm}$. Unde constat, si $lpp + mmp$ æquetur n^3, radicem æquationis fore æqualem singulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp + mm}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm p^4, hoc est, x major quàm p, erit quoque n^3x majus quàm $lx^3 + mmxx$. Jam si æquatio proposita est realis, erit & x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major quàm m, & eadem quantitas x etiam major sit quàm p, quandoquidem & tunc n^3x majus est quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x majus quàm $lmxx + mmxx$, & $\frac{n^3}{lm + mm}$ majus quàm x. Quare in hoc casu erit x major quàm p, & minor quàm $\frac{n^3}{lm + mm}$. Quòd si existente x majore quàm p ipsa minor sit quàm m, erit n^3x majus quàm $lx^3 + mx^3$, & $\frac{n^3}{l + m}$ majus quàm xx. Ergo in hoc casu erit x major quàm p, & minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l + m}}$. Quòd si verò, x minori existente quàm p, ipsa sit major quàm m, vel eidem æqualis, quandoquidem & tunc n^3x minus est quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x

minor quàm $lx^3 + mx^3$, hoc eſt, xx majus quàm $\frac{n^3}{l+m}$. Quare in hoc caſu erit x minor quàm p, & major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$. Denique, cùm fuerit x minor quàm p, & ipſa etiam minor quàm m, quoniam & tunc n^3x minus eſt quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x minus quàm $lmxx + mmxx$, & x major quàm $\frac{n^3}{lm+mm}$. Unde conſtat univerſaliter, radicem æquationis propoſitæ eſſe æqualem ſingulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp+mm}$, cùm eſt $lpp + mmp$ æquale ipſi n^3; ſed cùm inæquales ſunt, eſſe radicem æquationis propoſitæ neceſſariò inter majorem & minorem terminorum p, $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$, & $\frac{n^3}{lm+mm}$.

Prop. 13. $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Factis neceſſariis tranſpoſitionibus, demonſtrabitur x fore minorem quàm p, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, $\sqrt{\frac{p^4}{mm}}$, & $\frac{p^4}{n^3}$; at verò majorem quàm $\frac{p^4}{p^3+lpp+mmp+n^3}$.

Prop. 14. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3x \infty mmxx + p^4 - lx^3$; ideoque ſi fuerit $x^4 \infty n^3x$, hoc eſt, $x \infty n$, erit $mmxx + p^4 \infty lx^3$, hoc eſt, $\frac{mmnn+p^4}{l} \infty x^3$. Quòd ſi fuerit x major quàm n, erit & $mmxx + p^4$ majus quàm lx^3: ſin minor fuerit, erit $mmxx + p^4$ minus quàm lx^3. Jam, ſi x major eſt quàm n, & etiam vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, multo magis erit $mmxx + ppxx$ majus quàm lx^3, hoc eſt, $\frac{mm+pp}{l}$ majus quàm x. Ergo in hoc caſu erit x major quàm n, & minor quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Quòd ſi x major fuerit quàm n, & etiam minor quàm p, quoniam & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, erit quoque $mmpp + p^4$ majus quàm lx^3, hoc eſt, x^3 minor quàm $\frac{mmpp+p^4}{l}$, & x minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Quare

Quare in hoc casu erit x major quàm n, & minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd si x minor fuerit quàm n, & vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx+p^4$ minus est quàm lx^3, erit quoque $mmpp+p^4$ minus quàm lx^3, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Ergo in hoc casu erit x minor quàm n, & major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd si verò x minor fuerit quàm n, & ipsa etiam minor sit quàm p, quoniam & tunc $mmxx+p^4$ minor est quàm lx^3; erit quoque $mmxx+ppxx$ minus quàm lx^3, & $\frac{mm+pp}{l}$ minus quàm x. Quare in hoc casu, erit x minor quàm n, & major quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Unde universaliter apparet, radicem æquationis propositæ necessariò esse inter maximum, & minimum trium terminorum n, $\frac{mm+pp}{l}$, & $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Prop. 15. $x^4+lx^3-mmxx+n^3x-p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4+lx^3-mmxx \infty p^4-n^3x$; ideoque si fuerit $x^4+lx^3-mmxx \infty 0$, seu, divisis omnibus terminis per xx, $xx+lx-mm \infty 0$; erit quoque $p^4-n^3x \infty 0$, hoc est, si est $xx \infty -lx+mm$, vel $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$, erit $p^4 \infty n^3x$, seu $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Unde patet, si $\frac{p^4}{n^3}$ est æquale ipsi $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$, radicem æquationis propositæ esse æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd si fuerit x^4+lx^3 majus quàm $mmxx$, hoc est, $xx+lx$ majus quàm mm, erit quoque p^4 majus quàm n^3x, hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Ac proinde cum $xx+lx$ majus sit quàm mm, erit $xx+lx$ majus quàm mm aliquâ quantitate. Quantitas autem hæc, licèt sit incognita, vocetur zz, eritque $xx+lx \infty mm+zz$, seu $xx \infty -lx+mm+zz$, hoc est, $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm+zz}$, ideoque x major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Ergo in hoc casu x minor erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd si fuerit x^4+lx^3 minus

nus quàm $mmxx$, hoc est, $xx + lx$ minus quàm mm, erit quoque $p4$ minus quàm $n3x$, hoc est, x major quàm $\frac{p4}{n3}$. Hinc cum $xx + lx$ minus sit quàm mm, erit $xx + lx$ minor quàm mm aliquâ quantitate. Vocetur quantitas hæc quamvis incognita zz, eritque $xx + lx + zz \propto mm$, vel $xx \propto - lx + mm - zz$, hoc est, $x \propto - \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, ideoque x minor erit quàm $- \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc casu erit x major quàm $\frac{p4}{n3}$, & minor quàm $- \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Atque ita in genere perspicuum est, cùm $\frac{p4}{n3}$ æquatur ipsi $- \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ æqualem esse singulis terminorum æqualium $\frac{p4}{n3}$ & $- \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; sin minus, quamlibet radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, necessariò esse inter hosce terminos $\frac{p4}{n3}$ & $- \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

FINIS.

JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CURVARUM LINEARUM.

Edita

Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN, in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris.

FRANCOFURTI,

Apud JOHANNEM FRIDERICUM KNOCH.

CIↃ IↃC XCV.

Clarissimo, Doctissimoq; VIRO,

D°. FRANCISCO a SCHOOTEN,

JOHANNES DE WITT

S. P. D.

Linearum rectarum, angulorumque, quos comprehendunt, ut & figurarum rectilinearum, quæ inde nascuntur, nec non Circulorum naturam veram atque intrinsecam, proprietatesque præcipuas, meo quidem judicio, satis perspicuè tradiderunt Antiqui; ac quo pacto ex iisdem traditis, imò ex paucis & principalioribus eorundem principiis, qualibet Problemata Plana, ac generaliter quæcunque in linearum rectarum, angulorum, figurarumque rectilinearum, nec non Circulorum contemplatione & cognitione desiderari queunt, resolvantur atque eruantur, universali quâdam viâ & Methodo Analyticâ, per Æquationum inventionem, harumque resolutionem, plenius planiusque à Recentioribus ostensum est; Adeò ut vel unico Circulo dato, utut exiguo aut ingenti, quæcunque Problemata Plana per solas lineas rectas unusquisque, in dictis Antiquorum Recentiorumque Geometrarum præceptis me-

mediocriter versatus, facillimè resolvat; ac proinde de iisdē vel plura vel alio modo proposita ac demonstrata quædam desiderare, & supervacuum & ineptum semper existimavi. At verò cum cæterarum linearum curvarum Elementa, prout à Veteribus tradita atque à Recentioribus explicata sunt, diligentiùs considerassem, originem earum è solido peti atque inde ipsas in planum transferri naturali ordini, qui in Mathematicis quàm maximè observandus est, omnino contrarium duxi; quemadmodum & demonstrationes in iisdem Elementis propositas, multis in locis eadem de causa & propter varias rationum compositiones, quibus sæpe innituntur, subobscuras, ac longa Propositionum serie Lectoribus tædio memoriæque oneri esse judicavi. Atque eâ quidem contemplatione excitatus jampridem, dum studiis humanioribus Liberaliumque Artiū doctrinæ incumbere mihi otium erat, animadverti, non eas solùm, quas vulgò Coni sectiones *appellârunt, sed & omnes omnino curvas lineas, cujuscunque sint generis, multipliciter quidem ex varia corporum diversimodè compositorum aut figuratorum sectione gigni; at verò earundem singulas infinitis quoque mo-*

dis

dis in plano generari, ipsarum autem naturam & proprietates ex ea generatione multò faciliùs quàm ex corporum sectione deduci; ac firmiter mihi persuasum habeo, nullam aliam esse causam, quòd linearum curvarum secundi generis ulteriorumque graduum ortus, natura, proprietas, atque essentia, cum exacta specierum enumeratione, à nemine antehac explicata ac demonstrata sint, quàm quòd tam in tractatione ortus & generationis, quàm in demonstratione essentiæ ac proprietatum linearum curvarum primi generis à naturali & simplicissima via deflexum sit, utpote cùm earundem contemplatio, prout in plano simplicissimè & quidem diversimodè generantur, intellectum & imaginationem ad genesin linearum curvarum secundi generis quasi sponte ducat. Cumque eorum, quæ antehac, dum per otium licuit, eò spectantia meditatus sum, tu nunc, amicissime Schooteni, *copiam tibi fieri desideres, en, quantum in me est, desiderio tuo satisfacio; quæque de eodem argumento à me quondam conscripta ac pene in ordinem redacta inveni, jam tibi mitto, tuique omnino juris facio; cætera autem, quæ sparsim tantùm annotata sunt, si modò graviora id ferent negotia, recolligam, debitoque ordine conjungam; recollecta, atque ordinata suo quoque tempore tibi missurus; Vale. Hagæ Com.* VIII *Octobr. Anni* M. DC. LVIII.

 JO-

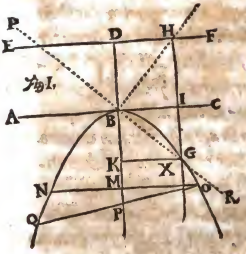
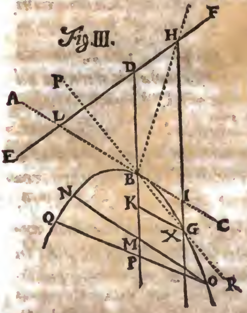
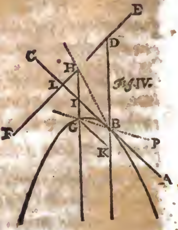

Fig. I.
P D H F E A B C I G K X M N O R Q P


Fig. II.
E D C P B A G K


Fig. III.
H F D P A L E B N K I Q G C X M P O R


Fig. IV.
E D C H L I F G B P K A

JOHANNIS DE WITT ELEMENTA CURVARUM LINEARUM.

LIBER PRIMUS.

CAPUT I.

DEFINITIONES PRIMÆ.

SI per rectam lineam immotam altera recta certo sui puncto sibi semper parallela moveatur aut incedat, eodemque illo motu anguli cujusdam rectilinei, circa punctum fixum (quod idem sit cum ejus vertice) circulariter mobilis, crus unum semper per prædictum mobile punctum transiens secum ducat, atque ita simul cruris alterius, & dictæ lineæ incedentis intersectione curva describatur linea, recta, quæ, uti prædictum est, sibi semper parallela movetur aut incedit, *Describens* dicetur.

II.

Altera verò recta, immota manens, *Directrix* vocabitur.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, atque is qui ei est deinceps, *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

At quos *describens* ad *directricem* efficit, *Anguli ad Directricem* dicentur.

V.

Punctum fixum, circa quod *angulus mobilis* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

VI.

Ea autem *describentis* pars, quæ inter *Polum*, & *directricem* intercipitur, *Intervallum* nominabitur.

VII.

Crus *anguli mobilis*, quod *describens* secum ducit, *Crus Patiens*.

VIII.

Alterum verò crus, quod à *describente* secatur, *Crus Efficiens*, & per anguli verticem productum, *Linea Efficiens* appellabitur.

IX.

Cùm *describens* per *Polum* transit, ac proinde & cum *crure patiente* coïncidit, esse tam *describentem* quàm *crus patiens*, ut & *lineam efficientem* totumque *angulum mobilem* in *statione prima* constitutum dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit in tali ipsas positione considerabimus.

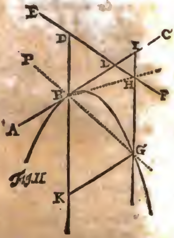
X.

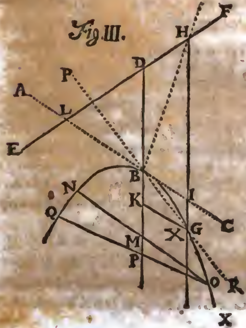
Quamlibet curvam, intersectione, uti prædictum est, in plano genitam, descriptam dicemus, *efficiente* atque *intervallo* consideratis, ut exhibentur ac sibi invicem junguntur *in statione prima*; adeò ut *efficiens* cum *intervallo*, quod tam cum ipsa *describente* quàm cum *crure patiente* in eadem statione coïncidit, *angulum mobilem* utrinque constituat.

Ut

Ut in appositis figuris, si recta HG sibi semper parallela certo sui puncto, puta H, moveri concipiatur per immotam EF, eodemque illo motu secum ducere crus BH anguli HBG, circu-









lariter

lariter mobilis circa punctum B; ita ut idem crus BH semper transeat per prædictum ipsius HG punctum H, simulque alterius cruris BG ac dictæ lineæ HG intersectione G describatur curva linea BG: erunt

HG *describens.*
EF *directrix.*
HBG, HBP *anguli mobiles.*
FHG, EHG *anguli ad directricem.*
B *Polus.*
BD *intervallum.*
BH *crus patiens.*
BG *crus efficiens.*
PG *linea efficiens.*
DK *describens in statione prima*, sive *describens* simpliciter.
DBC, DBA *anguli mobiles in statione prima.*
AC *efficiens in statione prima*, sive *efficiens* simpliciter.

Curvam BG, *efficiente* AC, *intervallo* verò BD descriptam dicemus; Et apparet, cùm *efficiens* PG est in statione AC, *crus patiens* BH coincidere cum *intervallo* BD; ac *describentem* HG tunc esse in statione DK, atque per *efficientem* & *intervallum* constitui utrinque *angulos mobiles* DBC, DBA.

THEOREMA I.

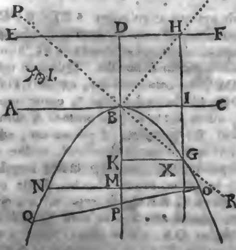
Propositio 1.

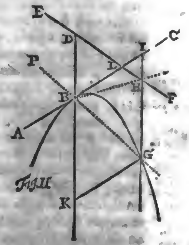
Quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo*, si *anguli mobiles* æquales sint iis, qui *ad directricem* sunt ab eadem parte, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quævis recta à quolibet curvæ puncto ad *describentem efficienti* æquidistans applicata possit rectangulum, sub *intervallo* atque ea *describentis* parte, quæ inter *Polum* & applicatam intercipitur, contentum.

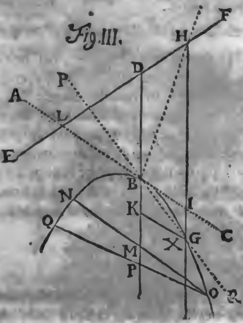
Sit *efficiente* ABC, *intervallo* BD, & *directrice* EF descripta curva BG; ita ut *angulus mobilis* DBA sit æqualis angulo EDB *ad directricem*, sitque à puncto G in curva utcunque assumpto ad *describentem* DBK applicata recta GK *efficienti* AC parallela: dico quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale esse.

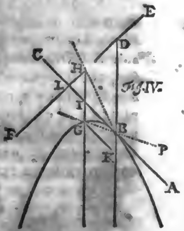
Con-

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuêre, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est punctum G, veluti in HBG & HIG: si tam *angulus mobilis* quàm is









qui ad *directricem* est rectus sit, uti in prima figura, erit [1] ut HI ad IB, ita IB ad IG, id est [2], ut DB ad GK, ita GK ad BK. ac proinde [3] quadratum rectæ GK rectangulo DBK æquale erit.

At verò si obliquus fuerit uterque angulorum ABD, EDB, uti in cæteris figuris, secabunt sese *efficiens* & *directrix* productæ ad eas partes, ubi *angulus mobilis*, isque qui ad *directricem* est, acuti erunt. sit itaque ipsarum intersectio in L puncto. Quoniam igitur tam anguli LBD, LDB, ex constructione, quàm LIH, LHI, propter parallelas DB, HI, æquales sunt [4]; erunt quoque [5] tam lineæ LD, LB, quàm LH, LI; ac proinde & compositæ [a] vel residuæ [b] DH, BI æquales. Cum autem, angulis DBI, HBG iisdem, sive æqualibus existentibus, addito [c], vel ablato [d] communi angulo HBI, angulus DBH angulo IBG, id est [6], BGK, fiat æqualis; atque angulus BDH ex constructione angulo DBI, id est [7], BKG, sit æqualis: erunt [8] triangula BDH, GKB æquiangula, eritque proinde [9], ut BD ad DH sive BI, hoc est [10], ad GK, ita eadem GK ad KB. quare, ut supra [11], quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale erit. Quod est propositum.

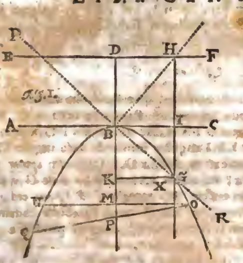
[1] per Cor. 8 sexti Eucl. [2] per 34 primi. [3] per 17 sexti. [4] per 29 primi. [5] per 6 primi. [a] in casu fig. II & similibus. [b] in casib. fig. III & IV, aut similibus. [c] in casu fig. II & sim. [d] in casib. fig. III & IV, aut similibus.

[6] per. 29 primi. [7] per 29 primi. [8] per 32 primi. [9] per 4 sexti. [10] per 34 primi. [11] per 17 sexti.

Constat itaque, curvam intersectione, uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quæ Veteribus Parabola; *Polumq.* idem punctum quod vertex; *lineam* autem *describentem in statione prima* eandem quæ diameter, aut si *anguli mobiles* recti fuerint, quæ axis; *intervallum* verò idem quod latus rectum sive recentioribus Parameter ad eandem diametrum eundemvé axem pertinens; atque *efficienti* parallelas, eas, quæ ordinatim ad diametrum vel axem applicatæ dicebantur; quare & eadem nomina retinento.

Corollarium I.

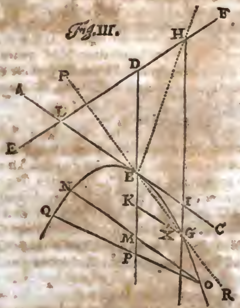
Cum *describentis efficientisq.* intersectio quibuscunque stationibus in uno tantùm puncto fiat, manifestum est, *describentem* in quacunque



cunque statione, id est, rectas omnes diametro æquidistantes, in uno tantùm puncto Parabolæ occurrere.

Corollarium 2.

Cumque continuo *describentis* à *Polo* recessu major majorque semper fiat angulus, quem *crus efficiens* constituit ad *lineam efficientem in statione prima*, veluti GBI, manifestum est, quamlibet rectam à *Polo* ad quodlibet curvę punctum ductam, ut, ex. gr., BG, totam intra Parabolam, productam autem, uti ad R, extra Parabolam cadere.



Corollarium 3.

Constat præterea angulum GBK indefinitè quidem diminui, omniq; proposito angulo rectilineo minorē reddi posse; sed *crus* tamen *efficiens* BG nunquam cum *describente* BK coincidere, multò minùs ipsam transire: ad hoc enim necessum foret, ut *crus patiens*

[1] per 29 primi. BH *directrici* EF foret parallelum [1], aut certè ut caderet infra eam, quæ à *Polo directrici* æquidistans ducta esset, quod planè impossibile est, cum *directricem* semper secet.

Corollarium 4.

Ideoque apparet, rectas omnes, quæ Parabolæ axem vel diametrum secant, productas tandem Parabolæ occurrere. Secet enim recta KX diametrum BKM, ac *crus efficiens* BG, in ea statione constitutum, ut KBG angulus minor sit dato angulo MKX [2], per Parabolam transeat in puncto G. Quoniam igitur recta KX cruri BG occurrit, aut eidem occurret inter B & G, quo casu ipsa producta etiam curvæ BG occursura est [3], aut eidem in ipso G puncto occurret, quo casu & simul Parabolæ ibidem occurret, aut denique ipsi BG occurret ad partes G productæ, quo utique casu prius Parabolæ occurret [4].

[2] juxta Cor. præcedens.
[3] per Corol. 2 hujus.
[4] per Cor. 2 hujus.

Corollarium 5.

Manifestum quoque est, applicatas omnes, utrinque Parabolâ terminatas, ab axe aut diametro bifariam dividi. Ut, si ducta sit applicata NMO, quoniam [5] tam quadratum NM quàm quadratum MO æquale est rectangulo DBM: erunt quoque eadem quadrata inter se æqualia, ac proinde & rectæ NM, MO æquales.

[5] per 1 hujus.

Corollarium 6.

Patet quoque præcedentis conversum, nempe non posse alias rectas præter eas, quæ *efficienti* æquidistant, in Parabola ab axe sive diametro bifariam secari. Si enim OQ, quæ non sit æquidistans ipsi AC, ab axe sive diametro BP bifariam divideretur in P, ductâ ON *efficienti* AC parallelâ, quæque proinde ab eodem axe sive diametro bifariam quoque secabitur in M [6], foret OP ad PQ, ut OM ad MN: ideoque [7] ducta recta per N & Q esset diametro parallela, : Parabolæ occurreret in duobus punctis N & Q. quod fieri non potest [8].

[6] per Corol. præcedens.
[7] per 2 sexti.
[8] juxta Corol. 1 hujus.

Itaque non solùm applicatæ omnes à diametro bifariam dividuntur, sed & quæ à diametro bisecantur ad ean-

eandem ordinatim applicatæ sunt: & si diameter rectam quamlibet in Parabola ductam bifariam dividat, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam secabit.

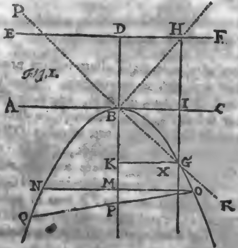


Fig. I.

Corollarium 7.

Ex demonstratis quoque facilè colligitur, applicatarum quadrata ad se invicem esse, sicut ad se invicem sunt diametri portiones inter verticem & applicatas interceptæ. Ut, si applicatæ sint GK, NM, erit [1] quadratum rectæ GK ad quadratum ipsius NM, ut rectangulum DBK ad rectangulum DBM, id est [2], ut BK ad BM.

[1] per 1 hujus.
[2] per 1 sexti.

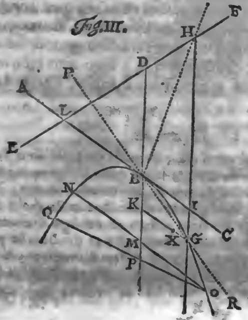


Fig. III.

Corollarium 8.

Ex ipsa porrò descriptione manifestum est, *efficientem in statione prima*, id est, rectam, quæ per *Polum* sive verticem applicatis æquidistans ducitur, ibidem Parabolam nec in alio præterea puncto contingere, multò minùs eandem secare. Sum-

re. Sumpto enim in curva præter *Polum* B puncto utcunque, veluti G, si *crus efficiens* eidem applicetur, uti in positione BG, constituetur ab ipso & *efficiente* angulus, ut GBC: atque adeò punctum G, utcunque sumptum, id est, tota Parabola, præter *Polum* B, infra *efficientem* ABC cadet.

Corollarium 9.

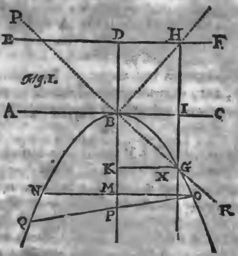
Constat quoque ex antedictis, non posse aliam rectam præter *efficientem* Parabolam in *Polo* seu vertice contingere. Quoniam enim alia quævis recta per B ducta, ex. gr., PR, angulum constituit cum *efficiente* AC, ut RBC, si à *Polo* ad *directricem* ducatur recta BH, ita ut eidem angulo RBC æqualis sit angulus DBH, ac per punctum H agatur recta diametro parallela, ut HG: erit ea ipsa *describens*, & HBR *angulus mobilis*, utpote æqualis *angulo mobili* DBC; BR verò *crus efficiens*: ac proinde ipsarum HG, BR intersectio G in Parabola. Quare cum recta PR non in puncto B solummodo, sed & in puncto G Parabolæ occurrat, ac tota BG recta [3] intra curvam cadat, non continget recta PR Parabolam, sed eandem secabit.

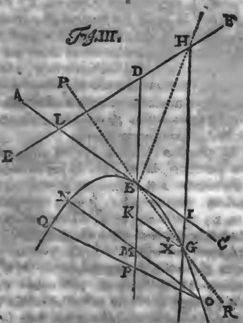
[3] *per Corol. 1 hujus.*

Itaque omnes rectæ in Parabola ductæ, quæ contingenti in vertice æquidistant, ordinatim ad diametrum applicantur sive ab eadem diametro bifariam dividuntur; & contra, quæ cuilibet rectæ, à diametro bifariam divisæ, per verticem æquidistans ducitur, Parabolam in vertice contingit.

Corollarium 10.

Ex dictis quoque obvium est, quo pacto datâ positione Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem ordinatim applicatæ faciunt ad eandem diametrum, ipsa Parabola in plano describatur. Si enim describendæ Parabolæ diameter sit BK, vertex B, latus rectum ad eandem diametrum pertinens BD, (quod quidem ipsi diametro in directum sit positum,) atque angulus quem faciunt ad dictam diametrum ordinatim applicatæ ABK vel CBK: oportet, ductâ per D lateris recti termi-





terminum rectâ EDF in angulo EDB ipsi ABD æquali, *efficiente* AC, & *intervallo* BD, ad *directricem* EF curvam describere, ut NBG; eritque hæc ipsa, quæ describenda proponitur Parabola.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si per aſſumptum utcunque in Parabola punctum recta ducatur, axi, diametrové parallela, erit quoque aſſumptum punctum Parabolæ vertex, ductaque parallela itidem diameter.

Sit Parabola quælibet HAM, cujus axis diameterve AB, & latus rectum ad eandem pertinens AC; ſitque per punctum M, in curva utcunque aſſumptum, ducta recta MO, axi ſive diametro AB parallela: dico aſſumptum quoque punctum M verticem, dictamque MO diametrum eſſe; imò ſi, ductâ per M rectâ SV, ita ut ab axe ſive diametro AB extra Parabolam abſcindat portionem AI æqualem AB, quæ inter verticem A & applicatam MB intercipitur; productâque OM ad K, ita ut ſit MK ipſis AB vel AI & IM tertia proportionalis, *efficiente* SV *intervallo* verò MK Parabola deſcribatur: dico hanc cum expoſita Parabola HAM eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat, ac proinde non ſolùm MO diametrum, atque M verticem fore, ſed & MK latus rectum eſſe ad dictam diametrum MO pertinens, & SV Parabolam in vertice M contingere, omneſque ipſi parallelas in Parabola ductas ab MO bifariam dividi, atque ad hanc ipſam MO ordinatim applicari.

Sit enim in expoſita Parabola HAM aſſumptum præterea aliud quodpiam punctum, ex. gr., H; ſitque ab eodem ducta HG ad axem ſive diametrum AB ordinatim applicata, nec non HO ipſi SV æquidiſtans, quarum prior, ſi opùs fuerit producta, rectæ KO occurrat in E; poſterior verò, itidem producta, ubi opùs fuerit, prædictum axem ſive diametrum AB ſecet in D. Et apparet[1], ſi quadratum rectæ HO æquale ſit rectangulo KMO, Parabolam, quæ *efficiente* SV, *intervallo* verò MK deſcribetur, per punctum quoque H tranſituram. Eſſe autem quadratum rectæ HO æquale rectangulo KMO multifariam id quidem, &, meo ſaltem judicio, breviter ſimpliciterque ſatis in eum qui ſequitur modum demonſtratur.

Quoniam eſt[2] ut CA ad MB, ita MB ad BA, erit, dupli-

[1] ex 1 hujus

[2] per 1 hujus, & 17 ſexti.

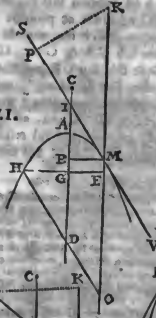


Fig. I.

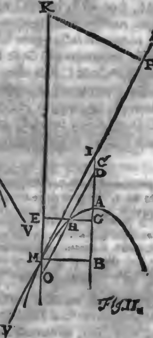


Fig. II.

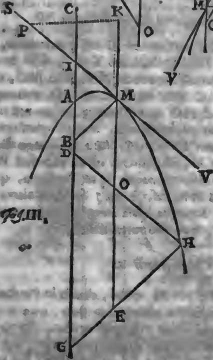


Fig. III.

catis consequentibus, ut CA ad duplam MB seu ad GE bis, ita MB ad BI, hoc est [3], ita HG ad GD: ac proinde [4] contentum sub mediis, nempe rectangulum HGE bis, æquale contento sub extremis, nimirum rectangulo sub CA & GD. Unde cum bina quadrata rectarum HG & BM seu GE æqualia sint [5] binis rectangulis CAG & CAB seu CAI, id est [6], rectangulo sub CA & IG: erunt quoque, additis [a] demptisve [b] utrinque æqualibus, nimirum rectangulo HGE bis ab una, ac rectangulo sub CA & GD ab altera parte [7], composita [a] vel residua [b], nempe quadratum EH ac rectangulum sub CA & ID seu MO æqualia [c].

3 *per 29 primi, & 4 sexti.*
4 *per 16 sexti.*
5 *per 1 hujus*
6 *per 1 secundi.*
a in casu fig. I. & similibus.
b in casu fig. II & III ac similibus.

7 *quippe per supra demonstrata rectangulum* HGE *bis æquale est rectangulo sub* CA *&* GD. c in casu enim fig. I, si ab una parte ad bina quadrata rectarum HG & GE addatur rectangulum HGE bis, compositum fit EH quadratum, per 4 secundi; ac si ab altera parte ad rectangulum sub CA & IG addatur rectangulum sub CA & GD, fit, per 1 secundi, rectangulum sub CA & ID seu MO. Eodem modo, si in casibus fig. II & III ab una parte à binis quadratis rectarum HG & GE auferatur rectangulum HGE bis, residuum erit, per 7 secundi, EH quadratum; ac si ab altera parte à rectangulo sub CA & IG auferatur rectangulum sub CA & GD, residuum erit, per 1 secundi, rectangulum sub CA & ID seu MO.

Ideoque cum sit ut BM quadratum ad MI quadratum, sive ut CAB rectangulum [8] ad rectangulum sub KM & AB [9], hoc est [10], ut CA ad KM, seu, assumptâ communi altitudine MO, ut prædictum rectangulum sub CA & MO ad KMO rectangulum, ita [11] EH quadratum ad HO quadratum; sitque rectangulum sub CA & MO, ut jam ostensum est, æquale quadrato EH: erit quoque [12] rectangulum KMO quadrato HO æquale.

8 *per 1 hujus, & ex hypothesi.*
9 *per 17 sexti, & ex hypothesi.*
10 *per 1 sexti.*
11 *per 4 & 22 sexti.*
12 *per 14 quinti.*

Unde cum punctum H, ubicunque id in exposita Parabola AH assumptum fuerit, semper quoque sit in Parabola, quæ *efficiente* SV, *intervallo* verò MK describitur: sequitur alteram alteri per omnia congruere, ideoque hanc cum illa eandem esse; ita ut constet veritas eorum, quæ proponebantur.

Corollarium 1.

Ex antedictis manifestum est, quòd, ductis in Parabola binis quibuslibet rectis sibi invicem æquidistantibus, quæ utramque bifariam dividit recta linea illius diameter existat. Quippe quæ per medium æquidistantium unius diameter ducetur, sive hæc sit ipsa diameter ex generatione, sive eidem parallela, per medium quo-



Fig. I.



Fig. II.

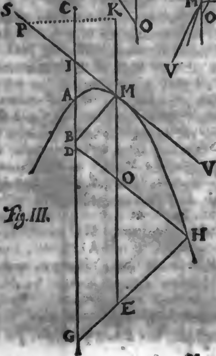


Fig. III.

quoque alterius æquidistantium transibit [1]. Atque ita apparet, quo pactò datæ cujuslibet Parabolæ diametrum simulque ordinatim ad eandem applicatas invenire liceat.

[1] per conclusionem 6 Cor. 1 hujus.

Corollarium 2.

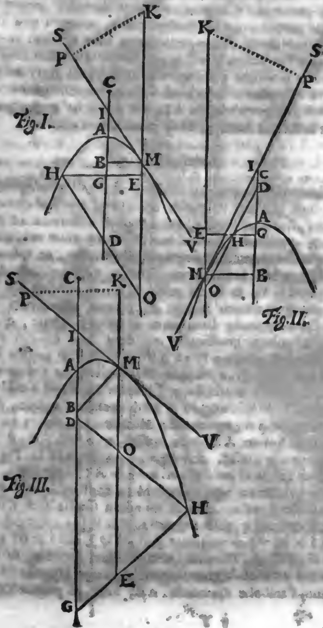
Patetque porrò, quaslibet rectas Parabolam ubivis contingentes, atque ordinatim à puncto contactus ad diametrum applicatas, æquales utrinque à vertice diametri portiones abscindere; &, vice versâ à terminis applicatarum per diametrum ductas, ita ut æquales utrinque à vertice diametri portiones ductæ applicatæque abscindant, Parabolam in dictis terminis contingere. Rectam enim S V, ex eo quòd æquales sint A I, A B, Parabolam in puncto M utcunque assumpto contingere, nunc [2] demonstratum; at nec aliam rectam in puncto M Parabolam contingere posse, superiùs [3] ostensum est.

[2] in 2 hujus.
[3] per 9 Cor. 1 hujus.

Corollarium 3.

Atque hinc non difficulter colligitur, quo pacto à quolibet puncto, non intra Parabolam dato, recta ducatur, quæ Parabolam contingat. Inventis enim [4] diametro quâcunque & rectis, quæ ad illam ordinatim applicantur, si in ejusdem diametri termino sit datum punctum, notum nunc est [5] rectam per idem punctum ductam, atque ordinatim applicatis æquidistantem, Parabolam ibidem contingere. At si alibi in curva sit punctum datum, veluti M, sitque inventa diameter A D: oportet ductâ ex M rectâ M B ipsi A D applicatâ, sumptâque A I ipsi A B æquali, ducere rectam per I & M. Sin autem extra curvam detur in diametro producta, veluti I: oportet, factâ A B ipsi A I æquali, atque B M ordinatim ad A D applicatâ, quæ Parabolæ occurrat in M, ducere rursus rectam per I & M. At verò si neque in curva neque in diametro producta detur, ut, si inventa diameter sit M O, datumque punctum I: oportet, ductâ I D diametro M O parallelâ, quæ Parabolam secet in A, sumptâque A B ipsi A I æquali, atque ex B ductâ B M ordinatim ad A D applicatâ, nimirum, quæ æquidistans sit contingenti in A, Parabolæque occurrat in M, ducere iterum rectam per I & M quippe constat ex antedictis [6], ipsam I M omni casu Parabolam contingere in puncto M.

[4] per 1 Corol. 1 hujus.
[5] per 8 & 9 Corol. 1 hujus.
[6] per 2 hujus, ejusque Cor. 2.


Fig. I.
S
P
K
C
I
A
B
M
H
G
E
D
V
O
Fig. II.
K
S
P
I
C
D
A
E
H
G
M
B
O
V
Fig. III.
S
P
C
K
I
A
M
B
D
O
V
H
E
G

Corollarium 4.

Constat præterea, assumptæ cujuslibet diametri parametrum esse tertiam proportionalem duabus rectis, quarum una est vel axis vel datæ diametri portio, intercepta inter ejusdem verticem & eam, quæ Parabolam in assumptæ diametri termino contingit, altera verò ea prædictæ contingentis pars, quæ inter datam & assumptam diametrum interjacet. Demonstratum enim est [1], rectam MK, ex eo quòd ipsis AI, IM tertia sit proportionalis, assumptæ utcunque diametri MO parametrum esse.

[1] in 2 hujus.

Corollarium 5.

Ex demonstratis quoque non difficulter colligitur, quo pacto, datâ positione quâlibet Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem faciunt ordinatim ad dictam diametrum applicatæ, alia ejusdem Parabolæ diameter, quâcum applicatæ alium quemlibet angulum constituant, ac ipsius vertex, & latus rectum inveniantur. Si enim datâ positione diametro MO, vertice M, & latere recto MK, anguloque SMK vel VMK, quem applicatæ faciunt ad dictam diametrum MO, aliam ejusdem Parabolæ diametrum invenire oporteat, quâcum applicatæ angulum constituant æqualem dato cuilibet angulo ABM: ducatur à termino K ad SV recta KP in angulo KPV ipsi dato ABM æquali, divisâque PM bifariam in I ducatur per I recta IB ipsi MO æquidistans. Deinde ab M ad eandem IB applicetur recta MB in angulo MBI dato angulo æquali, divisâque BI bifariam in A, erit quæsita diameter AB, vertex punctum A, ejusque parameter AC, recta nempe, quæ ipsis AB, BM tertia proportionalis existit. Est enim [2] punctum M in Parabola, quæ *effuiente* ipsi BM parallelâ ac *intervallo* AC describitur, quandoquidem quadratum applicatæ BM ex constructione [3] rectangulo CAB est æquale. Deinde quoniam similia sunt triangula BIM & PMK, ob æquales angulos ad B & P (ex constructione), atque ad I & M [4] (ob parallelas AD, MO), erit [5] ut BI ad IM, ita PM ad MK. &, sumptis antecedentium dimidiis, ut AI ad IM, ita IM ad MK. Quare secundùm ea quæ superiùs [6] demonstrata sunt, Parabolæ diametris AB, MO, ac parametris AC, MK,

[2] per 1 hujus.
[3] per 17 sexti.
[4] per 29 primi.
[5] per 4 sexti.
[6] in 2 hujus.

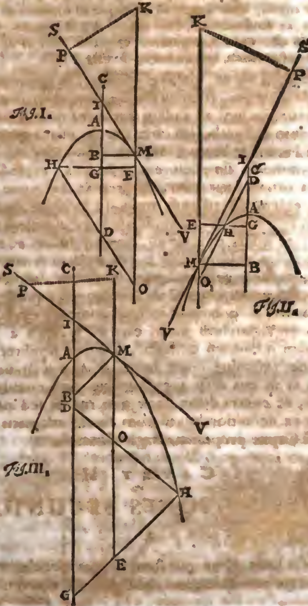


Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

MK, in dictis angulis descriptæ omnino eædem erunt. Sunt autem & anguli, quos faciunt MB aliæque ad diametrum AD applicatæ, ex constructione, dato angulo ABM æquales. Quocirca effectum est, quod quærebatur. Quòd si verò datus angulus ABM rectus fuerit, ipse axis erit, inventa AD.

Etiamsi curva, quálibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descripta, si *anguli mobiles* inæquales sint iis, qui ad *directricem* sunt ab eadem parte, ea ipsa sit, cui post Circulum & Parabolam inter curvas primi generis primum locum tribuam, utpote quam sequenti specie quodammodo simpliciorem judicem; cujusque proptcrea ortum, naturam, & proprietates nunc expositurus eidem describendi methodo insistere, præmissisque in principio definitionibus inhærere possem; cum tamen ea ipsius proprietas, quam primam ac maximè universalem existimo, & è qua cæteras facillimè deduco, ex aliis generationum speciebus distinctiùs appareat atque expeditiùs demonstretur, quod in Mathematicis, & præcipuè in Elementorum explicatione non parvi faciendum puto, eam selegi, quæ à jam dicta quàm minimum deflectat, quæque similiter anguli rectilinei rectæque lineæ motu & intersectione perficitur; at in qua dicti anguli motus non circularis sed rectus, ac contra dictæ lineæ non rectus sed circularis est, ut ex definitionibus in eum finem adaptatis, & sequenti Capite propositis, magis elucescet.

Caput II.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

I.

Si recta linea circa punctum fixum circulariter mota angulum quendam rectilineum, altero sui crure immo-

immotæ rectæ lineæ applicatum, per eandem immotam lineam promoveat, & secum ducat, ita ut prædicta recta circulariter mota semper per idem applicati cruris punctum transeat, simulque alterius cruris ac ejusdem lineæ motæ intersectione curva describatur, appellabitur hæc ipsa circulariter mota *linea describens*.

II.

Altera verò immota manens *Directricis* nomen retinebit.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, isque qui ei est deinceps, similiter & hîc *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

Sicuti & punctum fixum, circa quod *describens* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

V.

Rursusque crus *anguli mobilis*, quod à *describente* per *directricem* promovetur, *Crus patiens*.

VI.

Alterum autem crus, quod à describente secatur, *Crus efficiens*, & per anguli verticem productum *Linea efficiens* appellabitur.

VII.

Cùm *descr ibens eicienti* parallela est ac proinde nulla ipsarum intersectio existit, tam *e ictentem* quàm *describentem* in *statione prima* constitutas dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit, in tali ipsas statione considerabimus.

VIII.

Intervallum autem hic nominabimus tam eam *Cruris patientis* partem, quæ inter *anguli mobilis* verticem & *describentem* interjacet, quàm eam *describentis* portionem, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur.

Ut in apposita figura, si recta A B C [a] circa A punctum circulariter moveri concipiatur, motuque suo promovere & secum ducere angulum B E C [a]; ita ut crus E B semper applicatum maneat immotæ rectæ lineæ K L, ac prædicta A B C mobilis semper transeat per idem punctum cruris E B, ex.gr., per B, simulque alterius cruris E C & dictæ lineæ A B C intersectione C describatur curva linea *c*C, sitque ducta A D cruri E C parallela: apparet, quò magis recta A B C ad ipsam A D accedit, eò minorem fieri angulum E C B, ac tandem cùm ipsa A B C pervenit ad A D, ita ut cum ipsa coincidat, eundem angulum E C B tunc penitus evanescere: cum A D, ac proinde & dicta A B C, statione illâ, cruri E C parallela sit; ita ut tunc dictum crus E C sive recta C E M eadem sit cum linea G F H, nimirum supposità D F ipsi B E, æquali, eruntque

[a] quæ quidem recta A B C, ut & angulus B E C in figura quatuor distinctis stationibus exhibentur.

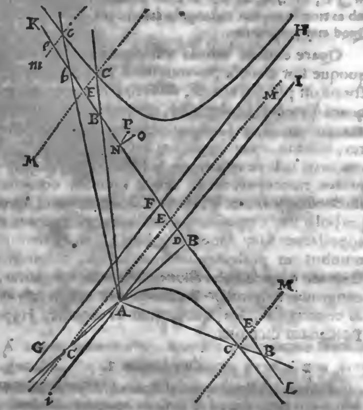
A B C *describens* in stationibus diversis.
K L *directrix*.
B E C, B E M, sive D F H & D F G *anguli mobiles*.
A *Polus*.
E B *crus patiens*.
E C *crus efficiens*.
M C *linea efficiens*.
G F H *efficiens in statione prima*, seu *efficiens* simpliciter.
A D I *describens in statione prima*, seu *describens* simpliciter.
E B seu F D & A D utrumque *intervallum*.

THEOREMA III.

Propositio 3.

Quibuslibet *angulis mobilibus* ac quibuscunque *intervallis*, juxta definitiones præmissas descriptâ curvâ, hoc ipsi proprium erit, ut rectangulum contentum

tum sub qualibet recta *efficienti* parallelâ, à quocunque curvæ puncto ad *directricem* ductâ, atque eâ *directricis* parte, quæ inter dictam parallelam & *efficientem* intercipitur, æquale sit ei, quod sub utroque *intervallo* continetur, rectangulo.



Sit quolibet *angulo mobili* BEC, & quibuscunque *intervallis* EB, seu FD & AD, *directrice* KDL, descripta curva cC; ita ut *efficiens* sit GFH, sitque à puncto C in curva utcunque assumpto ad *directricem* ducta CE *efficienti* GFH, ac proinde & *intervallo* AD parallela: dico rectangulum FEC æquale esse ADF rectangulo, sive ei, quod sub AD, EB continetur.

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuère, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est punctum C, veluti in BEC, & ABC, quoniam æquales sunt rectæ EB, FD, additâ vel ablatâ utrinque FB vel ED: erunt quoque rectæ BD, FE æquales; cumque [1] propter parallelas EC, AD æquiangula sint triangula BDA, BEC: erit [2] ut BD, id est, FE, ad DA, ita BE ad EC: ideoque [3] rectangulum FEC sub extremis æquale rectangulo sub mediis AD, EB seu ADF. Quod erat propositum.

[1] per 29 primi.
[2] per 4 sexti.
[3] per 16 sexti.

Quare cum & omnia rectangula, ut FEC, inter se quoque sint æqualia, manifestum est, curvam, intersectione uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quam Veteres Hyperbolam vocarunt, aut, si binas curvas eodem & continuato motu genitas simul considerES, esse eas, quas Oppositas Sectiones dixère; *directricem* verò KL ac *efficientem* GH eas ipsas, quas Asymptotos nuncupaverunt, atque ipsarum occursum sive intersectionem, ut F, idem illud punctum, quod Hyperbolæ sive Oppositarum Sectionum Centrum ab ipsis appellatum fuit. ideoque & hæc singula iisdem illis nominibus in posterum indigitabimus, solummodo sectionum nomen, ob rationes superiùs [4] expositas, minùs congruum evitaturi. Rectangulum autem sub *intervallis* contentum, seu, quadratum ei æquale, Hyperbolæ Potentiam dicemus.

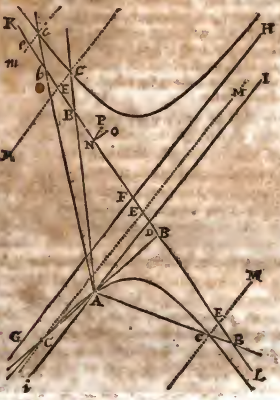
[4] in Epistola ad Schotenium.

Corollarium 1.

Ex ipsa descriptione manifestum est, Asymptotos & Hyperbolam magis magisque ad se invicem continuè accedere, tandemque pervenire ad distantiam, datâ quâlibet distantiâ minorem; cujus tamen, si demonstrationem exactiorem desideres, data distantia sit recta NO, ad Asymptoton FK perpendicularis. Sumptâ igitur NP, quæ eâdem NO minor sit, si fiat ut NP ad AD, ita DF ad Fe, ac per *e* ducatur *ec* ipsi NP æqualis atque Asymptoto FH æquidistans: erit [5] rectangulum F*ec* Potentiæ ADF æqua-

[5] per 16 sexti.

æquale, ideoque juxta ea, quæ [6] demonſtrata ſunt, punctum C in Hyperbola. Eſt autem & ce ipſi PN æqualis, hoc eſt, datâ di- [6] in 2 hujus.



ſtantiâ NO minor. Quare & perpendicularis à puncto e ad Aſymptoton FK ducta, id eſt, diſtantia Hyperbolæ à prædicta Aſymptoto, ibidem datâ diſtantiâ NO multò minor erit.

Corollarium 2.

Atque ita ſimul apparet, rectas omnes, quæ ductæ ex quolibet puncto intra angulum, qui ad verticem eſt ei, qui Hyperbolam continet, per centrum tranſeunt, vel Aſymptotorum alterutram ſecant, Hyperbolæ tandem occurrere, productaſque eandem, & in

in uno tantùm puncto, secare: quandoquidem hæ productæ ab utraque Asymptoto magis magisque semper abscedunt.

Corollarium 3.

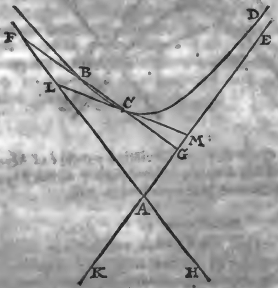
Constat præterea, *efficientem* in quacunque statione, id est, rectas omnes Asymptoto parallelas similiter Hyperbolæ, & quidem in uno tantùm puncto, occurrere, productasque illam ibidem secare. Impossibile enim est, ut *describens* atque *efficiens* ullâ statione sese in pluribus punctis intersecent.

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Recta linea, sive per bina quælibet in Hyperbola puncta transiens, sive eidem ita occurrens, ut producta utrinque extra Hyperbolam cadat, utrique Asymptoto, intra angulum, qui curvam continet, occurrit.

Sint in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti KAE, HAF, ductæ FBCG, transiens per bina curvæ puncta B & C, atque MC eidem occurrens in C, ità ut producta versùs L utrinque extra Hyperbolam cadat; Dico tam rectam FBCG quàm rectam MCL utrique Asymptoto KAE & HAF intra angulum EAF occurrere. Hoc enim si non accideret, eadem FBCG vel MCL aut Asym-



Asymptotorum alterutri parallela esset, aut, si vel huic vel illi Asymptoto extra angulum EAF occurreret, ex puncto intra angulum KAH ad verticem ei qui Hyperbolam continet ducta hanc vel illam Asymptoton secaret; ideoque [1] curvæ in uno tantùm puncto non verò in duobus occurreret, ac producta eandem secaret, non autem utrinque extra Hyperbolam caderet, contra id quod ponitur. Ac proinde constat propositum.

[1] per 1 & 3 Cor. 3 hujus.

THEOREMA V.

Propositio 5.

Assumptis, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis, duobus utcunque punctis, ductisque per eadem sive unâ rectâ sive duabus, sibi mutuò parallelis: erunt rectangula sub ductæ vel ductarum partibus, Hyperbolâ & Asymptoto utrinque interceptis, sibi invicem æqualia.

Fig. 1.



Sint, vel in eadem, vel in oppositis Hyperbolis BPCD, cujus Asymptoti AE, AF, assumpta utcunque bina puncta B & C, ac per eadem ductæ binæ rectæ BD, CP sibi invicem parallelæ, Asymptotisque occurrentes in punctis E, F, G, H [a]: dico rectangulum EBF rectangulo GCH æquale esse.

[a] qui utique occursus in casu primæ figuræ fit intra angulum EAF, per 4. hujus.

Ductis enim per eadem puncta B & C rectis, utrique Asymptoto parallelis alteràque Asymptoto terminatis, BI, BL, CK, CM: erit [1], propter rectangula IBL & KCM [2] æqualia, ut IB ad KC, hoc est [3], ut EB

[1] per 16 sexti.
[2] per 3 hujus.
[3] per 29 primi, & 4 sexti.

ad GC, ita CM ad BL, id est, ita CH ad BF. ac proinde [4] rectangula EBF & GCH æqualia sunt. Quod demonstrandum erat.

[4] per 16 sexti.

Eodem modo ostendetur, si per bina puncta, ut B & D, una recta ducatur BC, quæ utrique Asymptoto occurrat in punctis E & F [a], rectangula EBF, FDE sibi invicem æqualia esse.

Corollarium 1.

In oppositis Hyperbolis, si parallelarum altera per centrum transeat, ut CP in tertia figura, eâdem demonstratione comprobatum erit, rectangula sub partibus quarumlibet rectarum, quæ per Asymptotos ad utramque curvam ducuntur, singula æqualia esse quadrato æquidistantis à centro ad Hyperbolam ductæ. Quare cum ex dictis appareat, si, ductâ per centrum rectâ utcunque veluti CGP in eadem figura, eidem ubivis alia recta æquidistans ducatur BD, quæ secet Asymptotos in E & F, rectangulum EBF vel FDE quadrato GC itemque & GP quadrato æquale esse: sequitur, ipsas quoque GC, GP esse sibi invicem æquales, hoc est, quamlibet rectam ad oppositas Hyperbolas per centrum ductam, in eodem centro bifariam secari.

Corollarium 2.

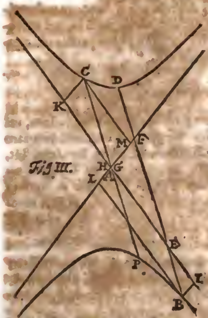
Constat quoque cujuslibet rectæ, sive per unam eandemque, sive per oppositas Hyperbolas ductæ, partes Hyperbolâ & Asymptotis interceptas sibi invicem esse æquales.

Ductâ enim utcunque BD, quæ Asymptotis occurrat in E & F, cum ex antedictis [5] BF sit ad DF, ut DE ad BE: erit quoque dividendo [6], vel, in oppositis Hyperbolis, componendo [7], BD ad DF, ut eadem BD ad BE, ideoque DF, BE [8], ac proinde & BF, DE sibi invicem æquales erunt.

[5] per 5 hujus, & 16 sexti.
[6] per 17 Quinti.
[7] per 18 Quinti.
[8] per 9 Quinti.

Corollarium 3.

Unde pariter constat, rectam, quæ vel unius ejusdemque, vel oppositarum Hyperbolarum, bina puncta conjungit, nullo alio sui





sui puncto in Hyperbola esse. Si enim præter D & B aliud quoddam ipsius DB punctum, ex. gr. X, in Hyperbola foret, esset [1] XF ipsi BE ac proinde & ipsi DF æqualis, pars toti, quod est absurdum.

[1] per Coroll. præced.

Corollarium 4.

Facilè autem apparet, & conversum quoque propositionis verum esse: nempe, si, iisdem positis, & rectangulis EBF, GCH æqualibus, punctorum B & C unum in Hyperbola sit, & alterum quoque fore in eadem vel opposita Hyperbola, cujus Asymptoti sunt AE & AF. Ex eo enim quòd æqualia sint rectangula EBF & GCH demonstrabitur æqualia quoque esse rectangula AIB & AKC eâdem methodo, quâ conversum supra ostensum fuit; ideoque si punctum B sit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum C in eadem aut in opposita Hyperbola, cujus Asymptoti sunt AE, AF, & vice versâ. De binis autem punctis in eadem linea, ut B & D, idem dictum esto; imò & idem erit in eadem linea, si dicta

[2] per 3 hujus.

 puncta

puncta, ut B & D, æqualiter ab Asymptotis distent: quandoquidem, si BE, DF æquales sunt, additâ utrinque BD, vel in oppositis Hyperbolis ipsâ EF, & BF ipsi DE, ideoque & rectangulum EBF rectangulo FDE æquale erit.

Corollarium 5.

Apparet quoque, eam, quæ ex centro quamlibet rectam, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis ductam, bifariam dividit, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam dividere. Ut, si ex centro A ducta ANO dividat bifariam rectam CP, cui æquidistans sit BD; cum, æqualibus NP, NC additis demptisve æqualibus [1] PH, CG, æquales quoque sint NH, NG, ideoque & OE, OF [2]: erunt similiter, demptis rursum additisve æqualibus [3] BE, DF, ipsæ OB & OD quoque æquales.

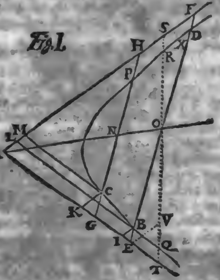
Ejusmodi autem rectæ à centro per Hyperbolam ductæ [a], interceptæ diametri, seu diametri simpliciter; at quæ à centro inter oppositas Hyperbolas ducuntur [b], secundæ diametri; parallelæ verò per easdem bifariam sectæ [c], ordinatim ad diametros applicatæ vocantur; & si applicatæ ad angulos rectos à diametris secentur, eædem diametri Hyperbolæ axes appellantur. Quando autem secunda diameter ordinatim ad interceptam diametrum applicatis parallela est, altera alteri *Conjugata* dicitur.

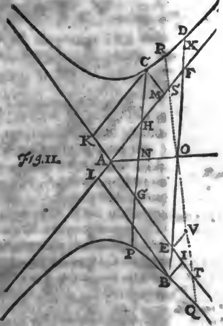
[1] per 2 Cor. 3 hujus.
[2] per 9 quinti, & 4 sexti.
[3] per 2 Cor. 5 hujus.
[a] ut AO similesque in I figura.
[b] ut AO similesque in II figura.
[c] ut PC, DB in utraque figura.

Corollarium 6.

Ex præmissis colligitur, non posse alias rectas, quàm dictas parallelas seu ordinatim applicatas, à diametro bifariam secari. Si enim fieri possit, secetur à diametro AO bifariam præter applicatas alia recta, ut QR, Asymptotis occurrens in S & T; & sit per O ordinatim applicata BOD, Asymptotis occurrens in E & F. Æquales ergo erunt tam EO, FO [4], quàm TO, SO [5]. Quoniam verò, ductâ EV ipsi SF parallelâ [6], æqui-

[4] per 2. & 5 Cor. 5 hujus.
[5] ex hypoth. juncto Cor. 5 hujus.
[6] per 15 & 29 Primi.





æquiangula sunt triangula EOV & FOS: erit [1] ut EO ad OV, ita FO ad OS. Quare cum EO ipsi FO sit æqualis, erit & [2] OV ipsi OS, hoc est, rectæ OT æqualis, pars toti, quod est absurdum. Non ergo bifariam secatur recta RQ à diametro AO.

[1] per 4 sexti.
[2] per 14 quinti.

Corollarium 7.

Atque hinc manifestum fit, quòd, si vel in una eademque vel ad oppositas Hyperbolas binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividit recta linea per centrum transeat seu diameter sit: Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur, per medium quoque alterius æquidistantium transibit [3]. Unde apparet, quo pacto datæ Hyperbolæ vel oppositarum Hyperbolarum diametros quotlibet, simulque ordinatim applicatas ad easdem, nec non & centrum, utpote quod binarum pluriumvé diametrorum communis intersectio est, reperire liceat.

[3] per 5 corol. 5 huius.

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Recta per quodlibet Hyperbolæ punctum ad utramque Asymptoton ducta, quæ in eodem puncto bifariam dividitur, curvam ibidem contingit; & contra, contingens ad utramque Asymptoton producta in puncto contactus bifariam divisa est.

Sit per punctum C in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti AE, AF, ducta recta GCH, utrinque Asymptotis terminata, quæ in eodem puncto C bifariam dividatur. Dico rectam GH curvam contingere in C. Secet enim, si fieri potest, recta GH Hyperbolam in C & I: eritque [1] IH rectæ CG, ideoque & ipsi CH æqualis. quod est absurdum. Non secat ergo GH Hyperbolam, sed eandem contingit. Dico porrò conversim, si GH in puncto C Hyperbolam contingat, eandem quoque in C bifariam dividi. Hoc enim si non sit, sumatur in CH majori parte ipsa HI æqualis GC. Hinc cum punctum C sit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum I in Hyperbola, totaque CI [3] intra curvam cadet, ideoque ipsa GH Hyperbolam non continget, sed eandem in punctis C & I secabit, contra id quod ponebatur. Non ergo GC ipsi CH inæqualis est. Ideoque casu utroque constat propositum.

[1] per 2 Cor. 5 hujus.
[2] per 4 Cor. 5 hujus
[3] per 3 Cor. 5 hujus.

Corollarium 1.

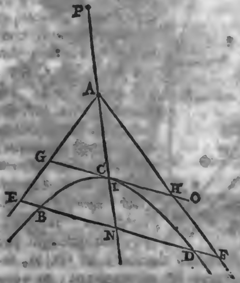
Manifestum itaque est ex antedictis, singula rectangula, quæ comprehenduntur sub partibus cujuslibet rectæ contingenti parallelæ, inter Hyperbolam & Asymptotos interceptis, esse æqualia dimidiæ tangentis quadrato. Ut, si tangenti GCH æquidistans utcunque ducta sit BD, Asymptotis occurrens in E & F: erit rectangulum EBF sive [4] BFD, ut & FDE sive DEB æquale rectangulo GCH [5], id est, ipsius CH vel CG, dimidiæ tangentis quadrato.

[4] per 2 Cor. 5 hujus.
[5] per 5 hujus.

Co-

Corollarium 2.

Patet porrò, rectam, quæ per diametri terminum ducitur æquidistans ei, quæ in Hyperbola ab eadem diametro bifariam secatur, id est, ordinatim applicatis parallela, Hyperbolam in dicto termino contingere. Ut, si ad diametrum AN ordinatim applicata sit BND, quæ producta Asymptotis occurrat in E & F, ac per diametri terminum C ducta sit recta GCH, ipsi BND æquidistans; cum æquales sint NF & NE [1]: erunt [2] quoque CH & CG æquales, ideoque [3] GCH Hyperbolam continget in C.



[1] per 2 & 5 Corol. 5 hujus.
[2] per 9 quinti, & 4 sexti.
[3] per 6 hujus.

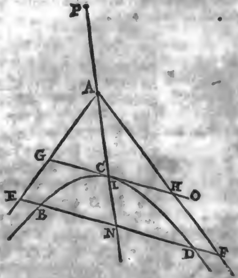
Corollarium 3.

Hinc liquet, non solùm omnes rectas in Hyperbola, contingenti parallelas, à diametro per tactum ductâ bifariam secari, ideoque ad eam ordinatim applicatas esse, sed & non posse plures rectas in uno eodemque puncto Hyperbolam contingere. Ut, si contingenti GH parallela sit BD, Asymptotis occurrens in E & F, ductâ per tactum C diametro ACN, quæ ductæ BD occurrat in N: quoniam [4] GC, CH æquales sunt, nec non EN, NF [5], erunt quoque (demptis æqualibus [6] EB, DF,) BN, ND æquales, ideoque & ad dictam diametrum ACN ordinatim applicatæ. At verò non posse aliam rectam præter GH Hyperbolam in puncto C contingere, patet, quandoquidem & omnes ipsi æquidistantes in Hyperbola ductæ, quæque aliæ essent quàm prædictæ applicatæ, bifariam quoque per eandem diametrum dividerentur [7]. quod fieri non posse superiùs [8] ostensum est.

[4] per 6 hujus.
[5] per 9 quinti & 4 sexti.
[6] per 2 Cor. 5 hujus.
[7] per supra demonstrata.
[8] in Cor. 6 5 hujus.

Cæ-

Cæterùm monendum hîc, ut diametrorum quoque magnitudo determinetur, eam, quæ à quocunque



in Hyperbola puncto per centrum ducta oppositâ Hyperbolâ terminatur, ideoque interceptæ inter centrum & curvam dupla est [a], ut CAP, vel Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum transversam diametrum; eamque, quæ in ipsius termino curvam contingens utrinque Asymptotis terminatur, aut quæ ipsi per centrum æqualis & parallela ducitur, ut GCH, secundam diametrum transversæ conjugatam; at verò illam, quæ ipsis PC, GH, transversæ nempe secundæque diametro tertia est proportionalis, ut CO, rectum latus sive Parametrum dici.

[a] per Corol. 1. 5 hujus.

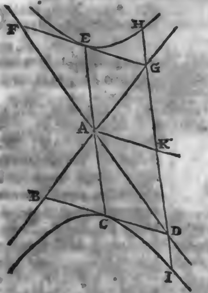
THEOREMA VII.

Propositio 7.

Quæ per terminum transversæ cujuslibet diametri recta ducitur, contingenti in vertice parallela, oppositam Hyperbolam contingit, & quæ ad secundam diametrum, assumptæ cuicunque diametro conjugatam, ordinatim applicatur, eidem assumptæ diametro æquidistat.

Sit

Sit Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum IC, HE, quarum Asymptoti BG, DF, diameter transversa utcunque assumpta CE, perque ejus terminum E ducta recta FEG parallela ipsi BD, quæ curvam in vertice C contingit, ita ut hæc atque illa Asymptotis occurrat in punctis B, D & F, G: dico prædictam quoque FEG oppositam Hyperbolam contingere in E; & si per centrum A ducatur secunda diameter AK, diametro CE conjugata, ordinatim ad eandem AK applicatas ipsi CE diametro æquidistare.



Quoniam enim est [1] tam AE ad EG, ut AC ad CB, quàm AE ad EF, ut AC ad CD; & sunt tam AE, AC [2] quàm CB, CD [3] æquales, erit quoque [4] tam EG ipsi CB, quàm EF ipsi CD, ac proinde & EG ipsi EF æqualis. Unde [5] recta FG oppositam Hyperbolam HE continget in puncto E. Quod primo loco propositum fuit. Porrò si per G & D ducatur recta GD, secans secundam diametrum AK in K, oppositisque Hyperbolis occurrens in H & I, cùm æquales & parallelæ sint EG, CD, erunt & [6] quæ ipsas conjungunt GD, CE parallelæ & æquales. Ideoque cum secunda diameter AK contingentibus BD, FG, id est [7], ordinatim ad diametrum CE applicatis æquidistans sit, utpote ex Hypothesi ipsi CE conjugata: erunt quoque [8] rectæ GK, EA, ut & KD, AC, ideoque & [9] GK, KD æquales. Quibus si addantur æquales [10] GH, DI: erunt similiter rectæ KH, KI sibi invicem æquales. Quocirca cum [11] ad secundam diametrum AK applicata sit recta HI, etiam cæteræ omnes ad eandem applicatæ [12] eidem HI ac proinde & diametro CE æquidistabunt. Quod secundo loco propositum erat.

[1] *per 29 primi, & 4 sexti.*
[2] *per 1 Corol. 5 hujus.*
[3] *per 6 hujus.*
[4] *per 14 quinti.*
[5] *per 6 hujus.*
[6] *per 33 primi.*
[7] *per 5 Cor. 6 hujus.*
[8] *per 34 primi.*
[9] *per 1 Cor. 5 hujus.*
[10] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[11] *per 6 Cor. 5 hujus.*
[12] *per 5 & 6 Cor. 5 hujus.*

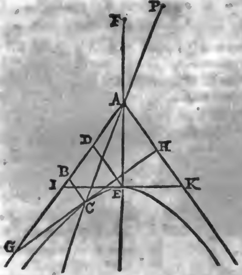
PROBLEMA I.

Propositio 8.

Datis quibuscunque diametris conjugatis, Hyperbolæ axes conjugatos invenire.

Sint datæ diametri conjugatæ PC, GH, oporteatque invenire conjugatos axes ejus Hyperbolæ, cujus eædem PC, GH conjugatæ diametri existunt.

Ductis ab A centro per G & H Asymptotis AG, AH, ductâque à C ad eorum alterutram rectâ CB alteri æquidistante, sumatur inter AB, BC media proportionalis AD. Dein ductâ DE ipsi AD æquali, atque Asymptoto AH parallelâ, erit EAF, transiens per E & A ac ipsius EA dupla, transversus axis qui quæritur, atque IEK ad eandem perpendicularis, ac utrinque Asymptotis terminata, axis secundus, priori conjugatus.



Quoniam enim punctum C [1] in Hyperbola est, rectangulumque ADE ipsi ABC æquale [2]; erit quoque punctum E [3] in Hyperbola. Porrò cum propter rectas DA, DE æquales [4] æqualis quoque sit DAE angulus ipsi DEA, id est [5], EAK angulo, sintque & anguli AEI, AEK ex constructione æquales: erunt [6] triangula AEI, AEK æquiangula, atque ob latus AE commune [7] etiam æqualia, latusque IE lateri EK æquale. Unde cum punctum E [8] in Hyperbola existat, dividatque bifariam rectam IK, utrinque Asymptotis terminatam, continget ipsa IK [9] curvam in E; ideoque, & propter angulos FEI, FEK rectos, conjugati axes erunt FE, IK.

[1] ex hypothesi.
[2] per 17 sexti.
[3] per 3 hujus.
[4] per 5 primi.
[5] per 29 primi.
[6] per 32 primi.
[7] per 26 primi.
[8] per sup. demonstr.
[9] per 6 hujus.

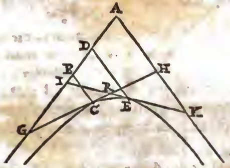
THEOREMA VIII.

Propoſitio 9.

Quælibet contingentes ab angulo Hyperbolæ Aſymptotis comprehenſo æqualia abſcindunt triangula, & rectangula ſub eorundem triangulorum lateribus comprehenſa invicem quoque æqualia ſunt, ac præterea majora eorundem latera à contingentibus, ipſæque baſes ſeu contingentes Aſymptotis terminatæ, in mutuo occurſu, nec non ipſarum partes curvam contingentes inter occurſum & Aſymptotos interjectæ, in punctis contactus, in eadem ratione ſecantur.

Hyperbolam CE, cujus Aſymptoti AG, AK, rectæ GH, IK utrinque Aſymptotis terminatæ, ac ſibi mutuò in R occurrentes, contingant in punctis C & E: dico tam rectangula quàm triangula GAH, IAK æqualia eſſe; ac præterea eſſe GI ad IA, ſicut KH ad HA; itemque GR ad RH, ſicut KR ad RI; nec non GC ad CR, ſicut KE ad ER.

Ductis enim à punctis contactus C & E rectis CB, ED Aſymptotorum alterutri, ut AH, parallelis, cum ſit ut GC ad GH, ita GB ad GA, & BC ad AH [1]; ſitque GH ipſius GC dupla [2]: [1] per 4 ſexti.



erit quoque tam GA ipſius GB quàm AH ipſius BC dupla, ideoque [3] rectangulum GAH rectanguli GBC ſive ABC quadruplum. Eodem modo rectangulum IAK rectanguli ADE quadruplum oſtendetur. Hinc cum æqualia ſint rectangula ABC, ADE [4], erunt quoque eorum quadrupla, nimirum rectangula GAH & IAK æqualia. Quod eſt primum.

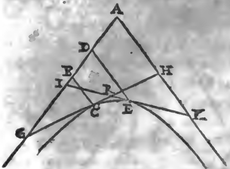
[2] per 6 huius. [3] per 20 ſexti. [4] per 5 huius.

Unde cum [5] ſit ut GA ad AK, ita IA ad AH, triangula quoque [5] per 16 ſexti.

que

[6] per 15 Sexti. [7] per 16 Quinti. [8] per 17 Quinti.

que GAH, IAK æqualia erunt [6], utpote habentia latera circa communem angulum, reciproca. Quod est secundum.



Ac cum permutando [7] quoque sit GA ad IA, ut AK ad AH: erit & [8] dividendo GI ad IA, ut KH ad HA. Quod est tertium.

[9] per 15 Sexti.

Porrò cùm ab æqualibus triangulis GAH, IAK ablato communi quadrilatero IRHA, residua, nempe triangula GRI & KRH, quoque æqualia remaneant, erunt [9] eorundem latera circa æqualem angulum ad R reciproca, id est, erit GR ad RH, ut KR ad RI. Quod est quartum.

[10] per 18 Quinti. [11] per Coroll. 19 Quinti.

Unde cum componendo [10] quoque sit GH ad RH, ut KI ad RI, aut, sumptis antecedentium dimidiis, CH ad HR, ut EI ad IR: erit & per conversionem rationis [11] CH sive GC ad CR, ut EI sive KE ad ER. Quod est quintum. Atque ita demonstrata sunt ea, quæ proponebantur.

THEOREMA IX.

Propositio 10.

Ductâ quacunque in Hyperbola diametro, erit ut quadratum secundæ ad quadratum transversæ diametri, sive ut parameter ad transversam diametrum, ita quadratum cujuslibet ordinatim applicatæ ad rectangulum sub ejusdem diametri partibus, utroque transversæ termino & applicatâ interceptis, comprehensum.

Sit in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti AE, AF, ducta diameter utcunque PACN, cujus secunda diameter transversæ PC conjugata sit GCH, parameter verò CI, ipsis nempe PC, GH tertia proportionalis, & sit ordinatim ad dictam diametrum appli-

applicata quælibet DN: dico esse ut GH quadratum ad CP quadratum, aut, quod idem est [1], ut recta IC ad rectam CP, ita quadratum DN ad PNC rectangulum.

[1] *per Coroll. 20 sexti.*

Producta enim applicata DN utrinque per Hyperbolam ad Asymptotos, ut EBNDF, cum sit [2] FN quadratum ad HC quadratum, id est [3], ad BFD rectangulum, ut NA quadratum ad CA quadratum: erit dividendo [4] DN quadratum ad HC quadratum, ut PNC rectangulum [5] ad CA quadratum, & permutando [6] DN quadratum ad PNC rectangulum, ut HC quadratum ad CA quadratum, sive [7] ut GH quadratum ad CP quadratum, aut, quod idem est, ut IC ad CP. Quod demonstrandum erat.

[2] *per 4, & 22 sexti.*
[3] *per 1 Corol. 6 hujus.*
[4] *per 6 secundi, & 17 quinti.*
[5] *per 6 secundi.*
[6] *per 16. quinti.*
[7] *per 15 quinti.*



Corollarium 1.

Hinc colligitur, quo pacto datæ cujuslibet Hyperbolæ, ut BCD, Asymptoti inveniantur. Quippe inventis [8] centro A, diametro quácunque AN, quæ curvam secet in C, & ordinatim ad eandem applicatâ BN; si, productâ NA ad P, ut AP ipsi AC sit æqualis, ductâque per C rectâ GCI applicatæ BN parallelâ, in eadem notentur puncta H & G, ita ut sit PNC rectangulum ad BN quadratum, sicut AC quadratum ad quadratum abs CG seu CH: erunt, quæ ex A centro per G & H ducuntur rectæ AGE & AHF, Asymptoti quæsitæ [9].

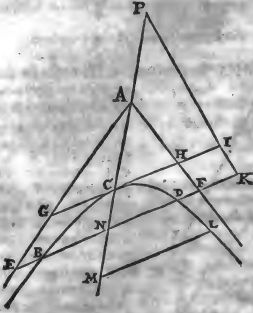
[8] *per 7 Coroll. 5 hujus.*
[9] *per conversum 10 hujus.*

Corollarium 2.

Ex demonstratis patet, si per P & I transversæ diametri parametrique terminos ducatur recta PIK, occurrens cuilibet appli-

 catæ,

catæ, ut ND, productæ, si opùs fuerit, in K: rectangulum CNK quadrato applicatæ DN æquale esse. Quoniam enim est [1] ut PC ad CI, sive ut PN ad NK [2], id est, (sumptâ NC communi altitudine) ut PNC rectangulum ad CNK rectangulum [3], ita idem PNC rectangulum ad DN quadratum, erit [4] rectangulum CNK quadrato applicatæ DN æquale, id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat:



[1] per 10 hujus conv.
[2] per 4 sexti.
[3] per 1 sexti.
[4] per 9 quinti.

Quæ ab Hyperbola ad diametrum ordinatim applicatur, potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam, quæ à diametro abscinditur inter ipsam applicatam & diametri verticem interjectam, excedensque figurâ simili similiterque positâ ei, quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est ex demonstratis, in Hyperbola applicatarum quadrata ad se invicem esse, veluti rectangula sub interceptis diametri portionibus, ab utroque transversæ termino sumptis. ut, si applicatæ sint LM, DN, erit ut quadratum LM ad rectangulum PMC, ita quadratum DN ad rectangulum PNC: cum utriusque eadem sit ratio, quæ est parametri ad transversam diametrum [5], eritque propterea [6] permutatim LM quadratum ad DN quadratum, ut PMC rectangulum ad PNC rectangulum.

[5] per 10 hujus.
[6] per 16 quinti.

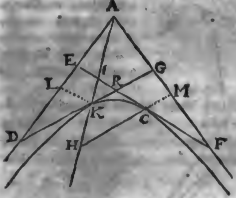
THEO-

THEOREMA X.

Propositio 11.

Si quælibet contingens cuicunque Hyperbolæ diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum sub diametri portionibus à centro per contingentem applicatamque abscissis æquale semidiametri transversæ quadrato.

Quamcunque Hyperbolam KC, cujus Asymptoti AD, AF, contingat in puncto C utcunque sumpto recta ECF, Asymptotis occurrens in E & F, diametro autem AH utcunque ductæ in I; & per punctum contactus C ad eandem diametrum ordinatim applicata sit CH, quæ producta Asymptoto occurrat in M. Dico rectangulum HAI æquale fore quadrato semidiametri KA, sive, quod idem est [1], continuè proportionales esse HA, KA, & IA.



Ductis enim DKG applicatæ CH, & KL contingenti FE parallelis, notatoque intersectionis puncto R, cum sit [2] RC ad CF, ut RK ad KD, hoc est [3], MG ad MF, ut LE ad LD: erit quoque [4] MG ad GF, ut LE ad ED. Quare cum porrò [5] sit FG ad GA, ut DE ad EA: erit [6] ex æquo MG ad GA, id est [7], HK ad KA, ut LE ad EA, hoc est [8], ut KI ad IA: & [9] componendo HA ad KA, ut KA ad IA. Quod demonstrandum erat.

[1] per 17 sexti.
[2] per 2 Cor. sexti, & 9 hujus.
[3] per 2 sexti.
[4] per compositionem rationis contrariam, vide Clavium ad 18 Quinti.
[5] per 9 hujus.
[6] per 22 Quinti.
[7] per 2 Sexti.
[8] per 2 Sexti.
[9] per 18 Quinti.

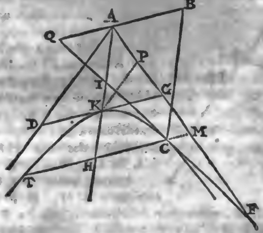
THEO-

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si quælibet contingens cuicunque ſecundæ Hyperboles diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum ſub ſecundæ diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abſciſſis, æquale ſemi-ſecundæ diametri quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Aſymptoti A D, A F, contingat in puncto C, utcunque ſumpto, recta F C Q, occurrens ſecundæ diametro A B, utcunque ductæ in Q: dico, ſi ex C ad eandem diametrum A B ordinatim applicetur recta C B, & ex A eidem æquidiſtans ducatur A K H, ſecans contingentem F C Q in I, Hyperbolæque occurrens in K, atque per K recta agatur D K G ipſi A B parallela, (ita ut [1] A K H diameter ſit ſecundæ diametro A B conjugata, ac ſemi-ſecundæ diametri magnitudine ſint K G, K D,) fore rectangulum B A Q æquale ipſius K G vel K D ſemi-ſecundæ diametri quadrato.



[1] per 7 hujus.

Ductâ enim per C rectâ T C M ſecundæ diametro A B parallelâ, ideoque ad interceptam diametrum A K H ordinatim applicatâ, quæ Hyperbolæ occurrat in T diametroque A H in H, Aſymtoto verò A F in M: Quoniam eſt [2] H A quadratum ad K A quadratum, ſive [3] H M quadratum ad K G quadratum ſeu

[2] per 11 hujus, & Cor. 20 ſexti.
[3] per 4 & 22 ſexti.

seu [1] ad TMC rectangulum, ut HA seu CB ad IA, id est [2], ut BQ ad AQ; erit dividendo [3] HC quadratum seu BA quadratum ad KG quadratum, ut BA ad AQ. Ac propterea [4] BA, KG, & AQ proportionales erunt, rectangulumque BAQ [5] quadrato KG æquale. Quod demonstrandum erat.

Corollarium ad duas propositiones præcedentes.

Ex dictis facillimè colligitur, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda sit recta, quæ datam Hyperbolam contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti K, inventis Asymptotis [6], ductâque ad illarum alterutram rectâ alteri Asymptoto parallelâ, ut KP, ac sumptâ PG ipsi AP æquali, continget juncta GKD Hyperbolam in K [7], quoniam uti GP ipsi PA, ita GK ipsi KD æqualis est [8].

Eodem modo, si datum punctum sit in Asymptotorum alterutra, veluti G, divisâ AG bifariam in P, ductâque PK alteri Asymptoto parallelâ, quæ curvæ occurrat [9] in K: continget juncta GKD [10] Hyperbolam in puncto occursus K.

Sit deinde datum punctum intra angulum Asymptotis comprehensum, veluti I: ductâ à centro [11] per I diametro, ut AIH, quæ curvæ occurrat in K, sumptâque AH ipsis AI, AK tertiâ proportionali, si per H agatur ordinatim applicata HC (nimirum, quæ contingenti in K æquidistet [12]), occurrens curvæ in C, continget juncta IC [13] Hyperbolam in eodem C puncto.

Sit denique datum punctum in alterutro angulorum, qui deinceps sunt, angulo Hyperbolam continenti, veluti Q: ductâ per Q & centrum A secundâ diametro QAB, transversâque ipsi conjugatâ AKH (nimirum, quæ producta quamlibet rectam in Hyperbolâ ductam ipsi QAB æquidistantem bifariam dividat), nec non tangente KG vel KD, Asymptoto terminatâ; si fiat quadrato KG vel KD æquale rectangulum QAB, ac per B ad secundam diametrum AB applicetur recta BC, nempe ipsi AK æquidistans [14], quæ curvæ occurrat in C: juncta QC [15] in eodem puncto C Hyperbolam continget.

Manifestum porrò est, si datum punctum vel intra Hyperbolam foret, vel intra angulum ad verticem ei, qui Hyperbolam continet; fieri non posse [16], ut ab eodem puncto ducatur recta, quæ producta eandem non secet.

[1] per 1 Cor. 6 hujus.
[2] per 4 sexti.
[3] per 17 quinti.
[4] per Cor. 20 sexti.
[5] per 17 sexti.
[6] per 1 Cor. 10 hujus.
[7] per 6 hujus.
[8] per 2 sexti.
[9] per 2 Cor. 3 hujus.
[10] per 2 sexti, & 6 hujus.
[11] invento per 7 Coroll. 5 hujus.
[12] per 3 Cor. 6 hujus.
[13] per 11 hujus
[14] per 7 hujus.
[15] per 12 hujus.
[16] juxta 1 Cor. 3 hujus.

CAPUT III.
DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

SI quodlibet trianguli rectanguli latus, sive id rectum angulum subtendat, sive acutorum alterutri oppositum sit, in eodem angulo moveatur, ita ut uterque moti lateris terminus semper existat, manéatque in latere, cui ab initio junctus fuit, producto tamen sive ab altera sive ab utraque parte, prout opus fuerit; idemque ille motus tam per angulos, qui præfato deinceps sunt, quàm per eum, qui ipsi ad verticem est, ordine continuetur, donec ad positionem situmque pristinum latus motum redierit, atque ita quolibet puncto quod in eodem, utcunque etiam producto, notare placuerit, curva describatur linea, prædictum mobile latus *Describentis Lineæ* nomine designabitur.

II.

Punctum autem quod in eodem ad descriptionem notare placuerit, *Punctum Efficiens*, aut *Punctum* simpliciter vocabitur.

III.

Distantia verò ejusdem puncti tam ab uno quàm ab altero *describentis* termino *Intervallum* dicetur.

IV.

Cùm de *angulo* simpliciter sermo erit, eum intelligemus, quem subtendit, & in quo movetur *describens*.

V.

Anguli vertex, quem *describens* continuato motu quasi circumambulat, *Centrum* appellabitur.

VI.

VI.

Alterutrum *anguli* crus, utrinque, si opùs fuerit, productum, atque ab utraque parte à *Centro* sumptum, magnitudine *intervalli* in altero crure terminati *Directrix* vocabitur.

VII.

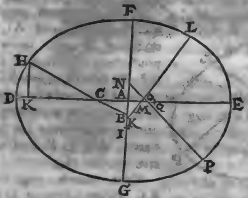
Describentem in statione prima dicemus, cùm ea ad *directricem* est perpendicularis: idem autem & tunc de *puncto* dictum esto, ac cùm de iis simpliciter sermo erit in ea statione considerabuntur.

VIII.

Recta à *puncto* per *Centrum* ducta, interceptæ inter *punctum* & *centrum* dupla, *Secans* nuncupabitur.

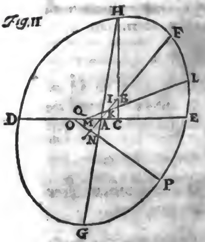
Ut si trianguli rectanguli ABC latus BC moveatur in *angulo* BAC, ex gr., ut terminus C tendat ad A, simulque B vel retrocedat vel promoveatur versùs I; ita tamen, ut iidem termini B & C semper sint & exactè maneant in lateribus, quibus ab initio juncti fuère, nempe B in latere AB, ac C in latere AC, productis ubi opùs fuerit; eodemque illo motu quolibet sui puncto, ex. gr., H, assumpto, prout placuerit, sive in ipsa BC, sive in eadem producta, (ut à nobis plerumque assumetur, cum id naturæ quodammodo convenientius videatur,) describat curvam lineam: nempe, ut, ubi punctum C pervenerit ad A, ac punctum B ad I, simulque H processerit ad F, descripta sit per motum puncti

Fig. 1.



H curvæ portio HF: deinde puncto C promoto per A ad M, simulque termino B retrogresso vel progresso ab I ad K, ita ut H pervenerit ad L, descriptus sit arcus FL: eodemque modo, ubi punctum B per K continuato motu pervenerit ad A, simulque punctum C per M progrediendo pervenerit ad Q, ac punctum H in E inciderit, descriptus sit arcus LE: ac rursus ubi punctum B per A progressum fuerit ad N, simulque punctum C ex Q vel retrocesserit vel progressum sit ad O, ita ut tunc punctum H pervenerit ad P, descriptus sit arcus EP: atque si porrò eodem pacto motus ille continuetur, donec prædictum punctum per G & D transierit rursusque ad H pervenerit, descripta sit tota curva HFLEPGD: erunt

Fig. II



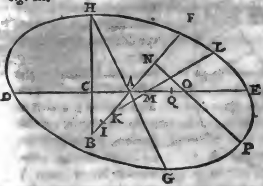
BC, quæ & in aliis stationibus est IA, KM, AQ, NO, &c. *linea describens.*

H *punctum efficiens.*

HC & HB utrumque *intervallum.*

Anguli vertex, nempe punctum A, *Centrum.*

Fig. III.



Et si alterutrum *anguli* crus, exempli gratiâ, AC, utrinque, si opùs fuerit, productum sit, veluti ad D & E; ita nempe, ut tam AD quàm AE æqualis sit rectæ HB, *intervallo* videlicet, quod in altero crure terminatur, tota DE *directrix* erit.

Cum autem *describens* BC eidem *directrici* DE est perpendicularis, quod quidem fit, quando ipsa positione eadem est cum crure AB, uti AI, *angulo* nempe existente recto, ut in

ut in prima figura, aut si obliquus fuerit *angulus*, in ipsa positione BC, uti exhibetur in sequentibus figuris, erit IA, casu primo, & BC, casu altero, *describens in statione prima* seu *describens* simpliciter, ideoque punctum F vel H, quod eidem in directum est, *punctum efficiens in statione prima* seu *punctum* simpliciter.

Ac proinde FAG [a] vel HAG [b], nempe ab eodem *puncto* per *centrum* A ducta atque ipsius FA sive HA dupla, *secantem* repraesentat.

[a] in casu fig. I & similib.
[b] in casu fig. II & III ac similib.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

In quocunque *angulo*, & quibuslibet *intervallis*, juxta definitiones hoc capite propositas, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quadratum cujuslibet *secanti* æquidistantis, à quolibet *directricis* puncto ad curvam applicatæ, eandem rationem habeat ad rectangulum sub partibus *directricis* per applicatam factis, quam quadratum *secantis* ad quadratum *directricis*.

Sit in quocunque *angulo* BAC, *intervallis* quibuslibet HC, HB, descripta curva DHEG, cujus *directrix* DAE, *secans* FAG [a] vel HAG [b]; atque à puncto I in *directrice* DE utcunque assumpto, ad curvam applicata IL *secanti* FAG [a] vel HAG [b] æquidistans: dico fore quadratum applicatæ LI ad rectangulum DIE, ut est quadratum *Secantis* FG [a] vel HG [b] ad quadratum *directricis* DE.

[a] in casib. fig. I, II, & similibus.
[b] in casib. cæterarum fig. & similibus.

Sit enim recta KM *describens* in ea statione, uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum L. Et primò quidem, si *angulus* BAC rectus sit [a], ductâ KN *directrici* DE parallelâ, quæ occurrat applicatæ LI, aut eidem productæ, si opùs fuerit, in N: cum *intervallum* KL æquale sit dimidiæ *directrici* AE vel AD, ideoque & KL quadratum æquale AE vel AD quadrato, ablatis utrinque æqualibus, nimirum [1], quadrato KN ab una, & quadrato AI ab altera parte, residua quoque, nempe LN quadratum & DIE rectangulum [2], æqualia erunt. Unde cum [3] sit ut LI quadratum ad LN quadratum, id est [4], ad DIE rectangulum

[1] per 34 primi.
[2] per 47 primi, & 5 secundi.
[3] per 4 & 22 sexti.
[4] per supra demonstr.

Fig. I.

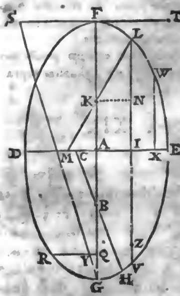
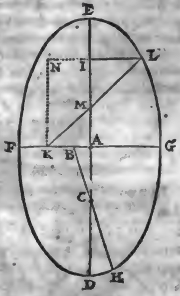
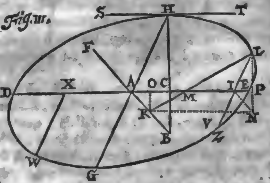


Fig. II.



gulum, ita L M quadratum ad L K quadratum, hoc est, ita F A quadratum ad A E quadratum, sive [1] ut F G quadratum ad D E quadratum, constat priori casu propositum.

Fig. III.



Non sit deinde *angulus* B A C rectus [b], ducanturque ad *directricem*, eamvé productam, si opùs fuerit, rectæ K O, L P *describenti* B C parallelæ, ideoque ad *directricem* D E perpendiculares, ut & I N lateri A B parallela, quæ ipsi L P, eidemvé productæ, si opùs fuerit, occurrat in N; ita ut [2] similia sint triangula A H C & I L P, itemque

[1] per 15 quinti.

[2] per 29 primi.

Fig. IV.

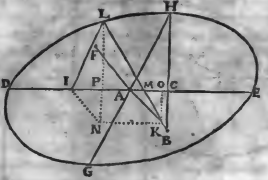


Fig. V.

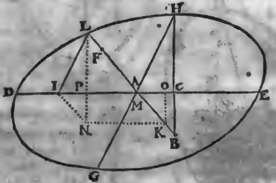
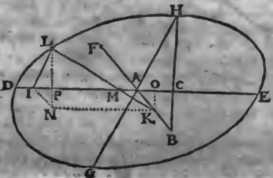


Fig. VI.



que AHB & ILN, ac denique jungatur KN. Quoniam itaque est [1], ut BA ad KA, sive ut BC, id est, MK, ad KO, ita ML, hoc est, HC, ad LP; ut autem HC ad LP, ita HA ad LI, & ita BA ad NI, ac per consequens BA ad KA, ut eadem BA ad NI: erit [2] KA ipsi NI æqualis. Sunt autem & parallelæ, ex hypothesi. Quare & AI, KN æquales & parallelæ erunt [3]. Porrò cum æquales sint rectæ KL & AE vel AD, ideoque & ipsarum quadrata, hinc subductis ab iis æqualibus, quadrato nimirum KN ab una, ac quadrato AI ab altera parte, erunt

[1] per 4 sexti.

[2] per 9 quinti.

[3] per 33 primi.

Fig. VII.

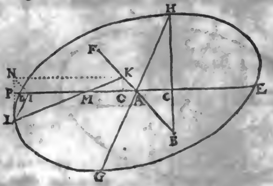
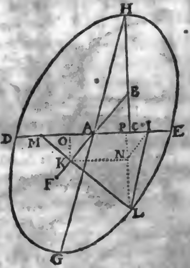


Fig. VIII.



[1] per 47 primi, & 5 secundi.
[2] per 4 & 21 sexti.
[3] per supra demonstr.
[4] per 15 quinti.

erunt quoque residua, quadratum nempe L N & rectangulum D I E æqualia [1]. Unde cum sit [2] L I quadratum ad L N quadratum, hoc est [3], ad D I E rectangulum, ut A H quadratum ad H B quadratum, id est, ad A E quadratum, sive [4] ut H G quadratum ad D E quadratum, erit etiam hoc casu propositum manifestum.

Atque ita liquet, prædictam curvam eam ipsam esse, quæ Veteribus Ellipsis dicta fuit, *directricem* verò ac *secantem* eas ipsas, quas conjugatas diametros, aut, si *angulus* rectus fuerit, conjugatos axes vocárunt.

Conjugatas itaque diametros appellabimus binas rectas per centrum ductas, ac utrinque Ellipsi terminatas;

tas; ita ut (quemadmodum de *directrice* & *secante* jam demonstratum est,) quadrata rectarum quæ alteri ipsarum applicantur alteri æquidistant, ita se habeant ad rectangula sub partibus per applicationem factis, ut quadratum alterius ad quadratum ejusdem quæ per applicatas secatur.

Et hæc quidem, cui applicatæ insistunt, transversa; illa verò, cui eædem æquidistant, secunda diameter vocabitur.

Cæteræ autem omnes, per centrum ductæ ac utrinque Ellipsi terminatæ, diametri simpliciter dicentur.

Rectam lineam quæ transversæ secundæque diametro tertia est proportionalis, Latus Rectum sive Parametrum vocabimus ad transversam diametrum pertinentem.

Notandum tamen est, si *angulus* rectus sit, ac *punctum* ab utroque *describentis* termino æqualiter distet, curvam, quæ motu ejusdem *puncti*, uti prædictum est, describitur, circumferentiam Circuli esse.

Corollarium 1.

Ex ipsa demonstratione & collatione figuræ primæ cum secunda manifestum est: in Ellipsi, conjugatorum axium transversum etiam secundum esse, & contra. Sive enim LI vel huic vel illi axi applicata sit, eodem modo semper probabitur esse quadratum ejusdem applicatæ ad rectangulum sub partibus axis cui applicatio fit, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis prædicti qui per applicatam secatur.

Corollarium 2.

Apparet porrò rectam per punctum ductam *directrici* parallelam, hoc est, eam, quæ per terminum secundæ diametri trans-

versæ æquidistans ducitur, Ellipsin in eodem termino, & in nullo præterea puncto contingere, multò minùs eandem seca-

Fig. I.

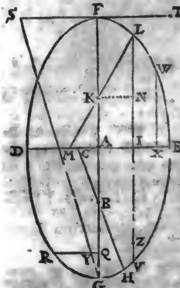
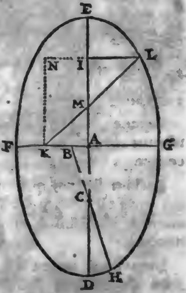


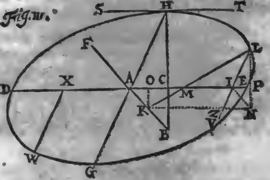
Fig. II.



re. Si enim per F [a] aut H [b] terminum secundæ diametri GF [a] vel GH [b] ductâ rectâ S T, transversæ diametro D E paralle-

[a] in casu fig. I & similib.
[b] in casu fig III & similib.

Fig. III.



lâ, assumatur aliud quodcunque in curva punctum, veluti L, quod descriptum sit *describente* in statione K M, ducaturque

LI [a] vel LP [b] ad transversam diametrum perpendicularis, fiet ut in triangulo MLI [a] vel MLP [b] recta ML, id est, perpendicularis FA [a] vel HC [b], major sit [1] quàm LI [a] vel LP [b]; adeò ut punctum L, quod in curva utcunque assumptum est, id est, tota Ellipsis, præter F [a] aut H [b] punctum, infra ductam ST, seu versùs Ellipseos centrum, cadat.

[a] in casu fig. I & similib.
[b] in casu fig. III & similib.
[1] per 18 primi.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est in Ellipsi applicatarum quadrata ad se invicem esse, ut rectangula sub diametri portionibus per applicatas factis. Ut si applicatæ sint LI, WX, erit quadratum WX ad rectangulum DXE, ut quadratum LI ad rectangulum DIE: cum [2] utriusque ratio sit eadem quæ quadrati FG [a] vel HG [b] ad quadratum DE, sive quæ parametri ad transversam diametrum; ideoque & permutatim WX quadratum ad LI quadratum, ut DXE rectangulum ad DIE rectangulum.

[2] per 18 hujus.

Corollarium 4.

Constat etiam ordinatim ad axem sive diametrum applicatas utrinque ad Ellipsin productas ab axe sive diametro bifariam secari. Ut, si applicata LI producta Ellipsi occurrat in V, quoniam est [3] quadratum LI ad rectangulum DIE, ut quadratum VI ad idem DIE rectangulum, erit [4] quadratum LI æquale quadrato VI, ideoque & ipsa recta LI ipsi rectæ VI æqualis.

[3] per Cor. præced.
[4] per 9 quinti.

Corollarium 5.

Constat porrò, applicatas Ellipsi in pluribus quàm duobus punctis non occurrere. Si enim LIV alio sui puncto præter L & V, exempli gratiâ, puncto Z, in Ellipsi esset, rectæ IL & IZ [5], ideoque IV & IZ pars & totum, æquales forent, quod est absurdum.

[5] per Cor. præcedens.

Corollarium 6.

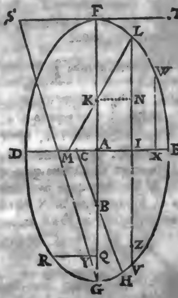
Ex dictis porrò colligitur, si ab extremitate transversæ dia-

 metri,

a in casu fig. 1 & similib.

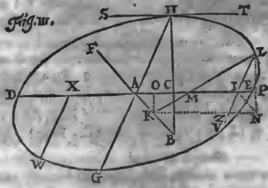
metri, ut puta FG [a], eductâ parametro F S secundæ diametro DE parallelâ, jungatur SG, atque ad eandem diametrum recta

Fig. 1.



quælibet ordinatim applicetur, ut RQ, quæ secet junctam SG in Y: fore rectangulum FQY quadrato applicatæ RQ æquale.

Fig. III.



1 per 13 hujus.
2 per Cor. 20 sexti.
3 per 1 sexti.

Quoniam enim est [1] GF quadratum ad DE quadratum, id est [2], GF ad FS, sive GQ ad QY, hoc est [3], GQF rectangulum ad

YQF

YQF rectangulum, ut [1] idem GQF rectangulum ad RQ quadratum, æqualia erunt [2] YQF rectangulum & RQ quadratum: id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat. [1] per 13 hujus. [2] per 9 quinti.

Quæ ab Ellipsi ad diametrum applicatur potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam quæ à diametro inter ipsam applicatam & diametri verticem abscinditur, deficiensque figurâ simili similiterque positâ ei quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 7.

Patet quoque ex antedictis, quo pacto, datis quibuslibet diametris conjugatis, Ellipsis in plano describatur.

Ut si conjugatis axibus DAE & FAG [a] Ellipsis sit describenda, *describente* BC, quæ semi-axium AD, AF differentia sit, *intervallis* verò HC, HB, ipsis AF, AD utroque utrique æqualibus, in *angulo* DAG, curva describatur, eritque hæc ipsa Ellipsis quæsita. [a] in casu fig. I & similib.

At si aliis quibuslibet conjugatis diametris, obliquè sese intersecantibus, ut DE, HG [b], Ellipsis sit describenda: demissâ à termino unius ad alteram perpendiculari, ut HC, sumptâque in eadem seu in ipsa producta, si opùs fuerit, rectâ HB ipsi DA vel AE æquali, & per B & A ductâ rectâ BAF, si *describente* BC, *intervallis* verò HC, HB, in *angulo* BAC Ellipsis describatur, erit hæc ea ipsa quæ quæritur. [b] in casu fig. III & simil.b.

Itaque cum datis diametro parametroque, nec non angulo quem faciunt cum eadem diametro ordinatim ad ipsam applicatæ, conjugatæ quoque diametri datæ sint: simul quoque innotescit, quo pacto & illis datis Ellipsis describatur.

THEOREMA XIII.

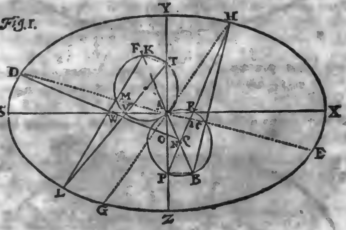
Propositio 14.

In Ellipsi circa quoscunque axes descriptâ, ducta quælibet diameter transversa est, habetque secundam sibi conjugatam.

Sit in Ellipsi SYXZ, cujus centrum A, axes verò SX, YZ, ducta quælibet diameter DAE; & sic describens OW in ea statione, uti fuit cùm descriptum est punctum D vel E, ita ut intervalla sint DW, DO. Deinde applicatâ eàdem describente in statione reciproca, hoc est, in alterutro angulorum qui ipsi WAO deinceps sunt, veluti PR, ita ut rectæ AR, AP ipsis AW, AO reciprocè sint æquales, nimirum AR ipsi AO, & AP ipsi AW, ac proinde triangulum WAO [1] simile & æquale triangulo PAR, ab Ellipseos puncto H, quod describenti PR in directum est, ducta sit diameter altera HAG. Dico diametrum DE transversam esse, HG autem secundam ipsi DE conjugatam: id est, si, ductâ HC ad DE perpendiculari, in eadem HC, produ-

[1] per 4 primi.

Fig. I.



ctâ, si opùs fuerit, sumatur HB ipsi DA æqualis; ductâque per B & A rectâ BAF, in angulo BAC, intervallis verò HC, HB, Ellipsis describatur, cujus utique conjugatæ diametri sunt in DE, & HG [2]: dico illam cum exposita Ellipsi omnino eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat.

[2] per 13 hujus ejusque Coroll. 7.

Assumpto enim in exposita Ellipsi alio quopiam puncto L, quod quidem descriptum sit describente in statione TV, diametro TV circulus describatur, qui, propter angulum TAV rectum [4], necessariò quoque per A transibit [3], lineasque BAF & DAE

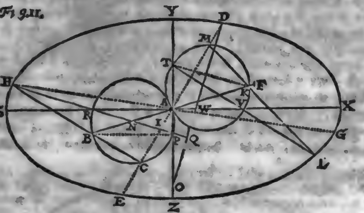
[4] aut certè, quia punctorum T & V alterutrum cum puncto A coïncidit, uti est casus in fig. VI.

[3] per conversam 31 tertii.

DAE alibi etiam secabit [b], uti in K & M. Deinde juncta KM, eaque productâ versùs L, agantur TK, PB.

[b] aut illarum alteram continget, alteram verò secabit, ut in casib. fig. III & IV.

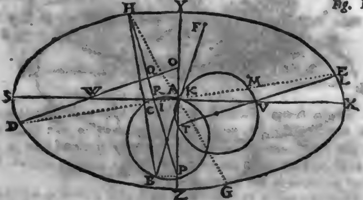
Fig. II.



Cum igitur ipsarum DO, HP, productarum, si opùs fuerit, intersectio ad Q fiat ad angulos rectos, ob similitudinem trianguli OQP cum utroque triangulorum OAW, RAP [c], notato ipsarum DE, PH intersectionis puncto I, erunt triangula

[c] vel, si puncta O & P coincidant, ob angulos AOW, APR semi rectos.

Fig. III.



IQD, ICH æquiangula, ob angulos ad Q & C rectos, ad I verò aut communem aut ad verticem. Ideoque cum triangula ODA, PHB latera OD, DA lateribus PH, HB, utrumque utrique, circum æquales angulos æqualia habeant; erit & [d] basis OA

[d] per 4 primi.

OA, five recta AK, basi PB, angulusque DOA, id est PRA, angulo HPB æqualis; ac propterea [1] recta PB ipsi RA parallela. Hinc cum triangulorum RAP & BPA latera RA, AP lateribus BP, PA circa æquales angulos, nempe rectos, utrumque utrique sint æqualia: erit & [2] basis AB basi PR, seu describenti TV, angulusque ARP angulo PBA æqualis. Quocirca & circulus diametro AB descriptus (qui quidem, ob angulos ACB, APB rectos, ac ABP, ARP æquales, per puncta C, P [3], & R [4] transit) circulo TKV æqualis erit. Unde cum anguli PBC, BPR ipsis TKM, KTV, uterque utrique, æquales sint, nempe PBC ipsi TKM [d], quoniam uterque cum angulo PAC seu TAM [5] binos rectos constituit [e], & BPR ipsi

[1] per 27 primi.

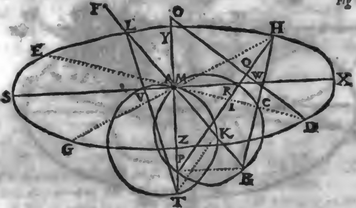
[2] per 4 primi.

[3] per conversam 31 tertii.

[4] per conversam 21 tertii.

[d] pro casu fig. II adde; ideoque & hi qui ipsis deinceps sunt. [5] per 22 tertii. [e] in casu fig. II uterque angulo PAC seu TAM æqualis est per 20 tertii. In casu fig. III uterque cum angulo PAC binos rectos constituit, nempe hic per 13 primi, & ille per 22 tertii. In casu fig. IV æquales sunt anguli PBC, TKM, quoniam prior cum angulo PAC, posterior verò cum angulo TVA (qui quidem PAC, TVA æquales sunt per 32 tertii) binos rectos constituit per 22 tertii. In casu fig. V. TKM sive TAM æqualis est angulo PBC; quia uterque cum angulo PAC duos rectos constituit per 13 primi & 20 ac 22 tertii. In casu fig. VI æquales sunt anguli PBC, TKM, quoniam angulus PAC æqualis est ei, qui in segmento AVM constitueretur per 32 tertii, quorum quidem prior cum angulo PBC, posterior verò cum angulo TKM binos rectos constituit per 22 tertii.

Fig IV.



KTV, propterea quòd uterque [6] angulo BAR seu KAV sive FAV æqualis est [f]; sintque porrò, ob æquales angulos PAB, TAK [7], tam peripheriæ PB, TK, quàm earum subtensæ, nempe,

[6] per 20 tertii, atque in casu fig. III per eâdem & 32 tertii.

[f] In casibus fig IV & V tam angulus BPR seu BAR, quàm angulus KTV cum angulo KAV duos rectos constituit per 13 primi, & 22 tertii. [7] per 26 & 29 tertii.

pe latera PB, TK dictis æqualibus angulis adjacentia inter se æqualia *g*: apparet sicuti rectæ BC, PR productæ concurrunt in H, ita quoque rectas KM, TV productas, & quidem, cum ipsi PH æqualis sit TL, in ipso puncto L concursuras. quippe ex antedictis [1] similia atque in totum æqualia sunt triangula BPH, KTL, adeoque & latus KL lateri BH æquale. Est autem [2] & subtensa KM subtensæ BC æqualis *h*, ob æquales angulos KAM, BAC. Quocirca & LM ipsi HC æqualis erit.

g In casu fig. III, ubi recta BAF tangit circulum TKV, æqualia sunt latera BP, TK ob angulos BAP, TVK æquales *per 32 tertii*. In casu fig. VI, ubi recta PAY contingit circulum TKV, æquales sunt subtensæ BP, TK ob angulos PAB, TMK æquales *per 32 tertii*.

[1] *per 26 primi.* [2] *per 26 & 29 tertii.* *h* In casu fig. III. KM ipsi BC est æqualis, quandoquidem angulus qui consisteret in segmento KTM æqualis foret angulo FAM seu BAC *per 32 tertii*. In casu fig. IV. KM ipsi BC est æqualis, quandoquidem angulus KTM æqualis est angulo KAC seu BAC *per 32 tertii*. In casu fig. V. KM ipsi BC est æqualis, quandoquidem angulus in segmento BC æqualis foret angulo KAM, utpote cum tam hic quàm ille cum angulo CAB duos rectos constitueret *per 13 primi & 22 tertii*.

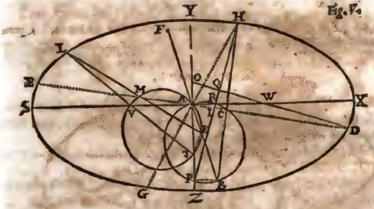


Fig. V.

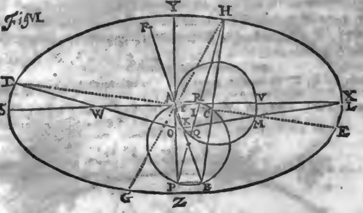
Unde cum describens sit KM, utpote ipsi BC æqualis, ac constituta in angulo KAM (qui cum ipso BAC vel idem *i*, vel ei ad verticem *k*, vel denique ipsi deinceps est *l*) aut certè cum alterutro crurum coincidens *m*, atque ex demonstratis æqualia quoque sint intervalla HB, HC intervallis LK, LM: sequitur punctum L, in exposita Ellipsi utcunque sumptum, id est, totam Ellipsin SYXZ, esse in Ellipsi, quæ in angulo BAC, intervallis HB, HC, describitur, ideoque alteram alteri per

i ut in casu fig. VI.
k ut in casibus fig. I, & II.
l in casu fig. V.
m ut in casibus fig. III & IV.

omnia congruere. Sunt autem [1] hujus conjugatæ diametri DE, HG. Quare & illius, quæ cum ipsa eadem est, conjugatæ dia-

[1] per 13 hujus, ejusque Cor. 7.

Fig. VI.



metri erunt, nimirum DE transversa, & HG secunda. Quod demonstrandum erat.

Corollarium 1.

Hinc colligitur non solùm Ellipses omnes suos habere axes, sed & quo pacto datis quibuslibet diametris conjugatis, ejus Ellipseos cujus diametri sunt, axes inveniantur.

Ut si cujuscunque Ellipseos conjugatæ diametri sint DAE & HAG, ductâ HB, semidiametro DA vel AE æquali, atque ad DE perpendiculari, junctâque BA ac ipsâ bifariam in N divisâ, si centro N intervallo NA vel NB circulus describatur, secans rectam per H & N ductam in P & R: erunt rectæ HP, HR semi-axes magnitudine, quæ idcirco utrinque à centro A versùs aut per puncta R & P, æquali longitudine in directum positæ, sicut totæ SX & YZ, exhibebunt magnitudine ac positione quæsitos axes ejusdem Ellipseos, cujus DAE & HAG conjugatæ diametri existunt.

Ductâ enim PB, sumptâque AO ipsi AR, ideoque [2] & ductæ PB æquali, agatur DO, occurrens ipsi SX in W. Cum itaque ob angulum ACB rectum descriptus circulus etiam per C transeat [3], erunt anguli PBH & OAD æquales, quoniam uterque

[2] per 4 primi.

[3] per 31 tertii.

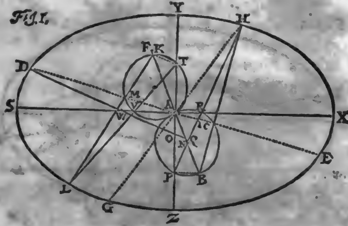
que cum angulo [a] PAC ſeu PBC duos rectos conſtituit [1]. Unde cum triangula OAD, PBH latera OA, AD lateribus PB, BH, utrumque utrique, & quidem circa æquales angulos æqualia habeant: erit quoque [2] baſis OD baſi PH, id eſt, rectæ SA vel AX, ut & angulus AOD angulo BPH ſeu [3] PRA æqualis. Hinc cum æqualia ſint triangula RAP, OAW, propter angulos ad R & O æquales, atque [4] RAP, OAW rectos, nec non latera RA & OA æqualia: erit etiam [5] latus AW lateri AP, ut & latus OW ipſi PR æquale. Quocirca cum [6] *deſcribentes* ſint

[a] *nimirum cum angulo* PAC *in caſu fig.* I & *ſimilibus, & cum angulo* PAC *ſeu* PBC, *in caſu fig.* II & *ſimilibus.*

[1] *per 13 primi & 22 tertii.*

[2] *per 4 primi.* [3] *per 29 primi.* [4] *per 31 tertii & 13 primi.* [5] *per 26 primi.* [6] *per 13 hujus.*

Fig. I.



OW, PR ejus Ellipſeos, cujus axes ſunt SX, YZ, & quidem in ſtatione reciproca conſtitutæ, *punctaq́ efficientia* D & H: manifeſtum eſt ex ſuperiori demonſtratione, Ellipſin, quæ axibus SX, YZ deſcribitur, cum ea, cujus diametri conjugatæ ſunt DE & HG, omnino eandem eſſe.

Atque ita, quæ de Ellipſi, circa quoſcunque axes deſcripta, ſuperiori Theoremate propoſita ac demonſtrata ſunt, etiam cuilibet Ellipſi, & circa quaſcunque diametros conjugatas deſcriptæ, convenire, manifeſtum eſt.

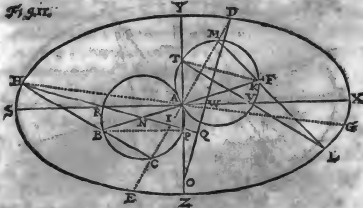
Corollarium 2.

Sequitur porrò ex demonstratione ejusdem Theorematis, in Ellipsi diametros omnes à centro bifariam secari. demonstratum enim est, in diametro DE, utcunque ductâ, partem AE parti DA æqualem esse, cum utraque *intervallo* HB æqualis sit.

Corollarium 3.

Patet insuper in Ellipsi, quarumcunque diametrorum conjugatarum transversam etiam secundam esse, & contra. Ut, si conjugatarum diametrorum DE, HG transversa sit DE, & HG se-

Fig. II.



cunda; cum in Ellipsi ducta quælibet diameter [x] transversa sit, habeatque secundam sibi conjugatam, erit quoque HG transversa. At verò & DE secundam esse ipsi HG conjugatam, factâ collatione figuræ I cum II transpositis tantùm literis, ac mutatis mutandis demonstratum simul apparebit.

[x] per 14 hujus ejusque Coroll. 1.

Corollarium 4.

Quare & quæ per terminum transversæ diametri secundæ æquidistans seu ordinatim applicatis parallela ducitur Ellipsin in eodem termino & in nullo præterea puncto contingit, totaque extra Ellipsin cadit [z].

[z] per 2 Cor. 13. & 3 Cor. 14 h. ins.

Corollarium 5.

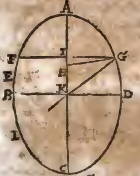
Adeoque quælibet recta, à quovis curvæ puncto ad quamcunque Ellipseos diametrum ordinatim applicata, tota intra Ellipsin cadit; utpote cum ea nec in totum extra Ellipsin cadere [1], nec eidem in pluribus quàm duobus punctis occurrere [2] possit.

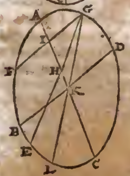
[1] per Cor. præcedens.
[2] per 5 Cor. 13 hujus.

Theorema XIV.

Propositio 15.

Quæ bina quælibet Ellipseos puncta conjungens recta linea bifariam à diametro dividitur, erit aut per centrum ducta, aut ad eandem diametrum ordinatim applicata, hoc est, conjugatæ diametro æquidistans.





Si enim in Ellipsi ABCD, cujus centrum K, à diametro AKC bifariam divideretur recta EHG, quæ neque per centrum transeat, neque conjugatæ diametro BD æquidistans sit; applicatâ ordinatim GIF, ductâque per centrum rectâ GKL: Quoniam esset, ut GH ad HE, ita tam GI ad IF [3], quàm GK ad KL [4], recta per F & E, nec non per E & L ducta foret una linea recta diametroque AC parallela [5]; ideoque ad alteram ipsi conjugatam, nempe ad BD, ordinatim applicata [6], atque Ellipsi in tribus punctis occurreret; quod fieri non posse supra [7] ostensum est.

[3] per 4 Cor. 13 hujus.
[4] per 2 Cor. 14 hujus.
[5] per 2 sexti.
[6] per 13 & 3 Cor. 14 hujus
[7] in 5to Coroll. 13 hujus.

Corollarium 1.

Ideoque si diameter rectam quamlibet in Ellipsi non per centrum ductam bifariam dividat, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam secabit [8].

[8] per 4 Cor. 13, & 15tam hujus.

Corollarium 2.

Quocirca si in Ellipsi binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividet recta linea per illius centrum transibit, seu ejusdem diameter existet. Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur per medium quoque alterius æquidistantium transibit [1]. Unde apparet, quo pacto datæ Ellipseos diametros quotlibet, simulque ad easdem ordinatim applicatas, nec non & ejus centrum, utpote quod duarum pluriumvé diametrorum communis intersectio est, ideoque & diametros conjugatas, axesque [2] invenire liceat.

[1] *per 1 Cor. 15 hujus.*

[2] *per 1 Cor. 14 hujus, aliterve, ut cuilibet obvium est.*

Corollarium 3.

Ex dictis facilè apparet, quamlibet rectam, quæ bina quæcunque Ellipseos puncta conjungit, totam intra Ellipsin cadere [3]: utpote cum ipsa [4] vel diameter sit, vel ordinatim applicata ad eam diametrum, quæ per ipsius medium & centrum ducitur.

[3] *per 5 Cor. 14 hujus.*

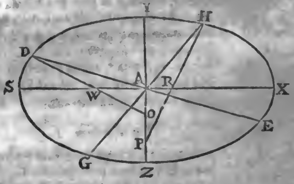
[4] *per 15 hujus ejusque Cor. 1.*

PROBLEMA II.

Propositio 16.

In data quacunque Ellipsi ductæ cuilibet diametro alteram conjugatam invenire.

In data Ellipsi SYXZ ductæ utcunque diametro DAE altera conjugata invenienda sit. Inventis [5] axibus SAX & YAZ, atque à termino D vel E ad axium alterutrum, veluti ad YAZ, applicatâ rectâ, ut DO, semi-axi alteri



SA æquali, quæ producta, si opus fuerit, secet eundem axem alte-

[5] *per 2 Cor. 15 hujus.*

alterum, uti in W, applicetur in statione reciproca ipsi OW, eidem æqualis recta PR, nempe ut AP, AR ipsis AW, AO singulæ singulis æquales sint, ac producta PR Ellipsi occurrat in puncto H, à quo si per centrum A ducatur recta HAG, Ellipsi terminata: constat, per ea, quæ ad Propositionem 14tam hujus libri demonstrata sunt, eandem HAG esse diametrum ipsi DE conjugatam.

Atque ita simul apparet, singulis diametris suas quoque distinctas conjugatas diametros esse, eidemque diametro unam tantùm conjugatam duci posse.

Corollarium.

Unde porrò perspicuum fit, quo pacto per datum quodlibet in Ellipsi punctum recta ducatur, quæ curvam in eodem ac in nullo alio præterea puncto contingat. Si enim ductâ per datum punctum & centrum diametro, inventâque alterâ ipsi conjugatâ [1], per idem punctum recta ducatur inventæ diametro conjugatæ æquidistans: erit eadem recta [2] contingens quæsita.

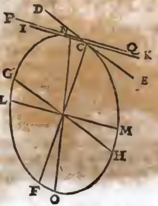
[1] per 16 hujus.

[2] per 4 Cor. 14 hujus.

THEOREMA XV.

Propositio 17.

Ellipsin in uno eodemque puncto præter rectam, quæ parallela est diametro illi, quæ per punctum & centrum ducitur, conjugatæ, alia recta non contingit.



Contingat Ellipsin CHFG in puncto C recta DCE, parallela diametro GH, quæ conjugata sit diametro CF, per punctum C & centrum ductæ: dico aliam rectam in puncto C eandem Ellipsin non contingere.

Si enim fieri potest, contingat eandem quoque in puncto C recta ICK, diametroque LM, eidem ICK æquidistanti, altera conjugata ducatur NO, (quæ cum à priori

CF

[1] per 4 Cor. 14 hujus. *[2] per 2 Cor. 13 hujus.* *[3] per idem Coroll.*

CF diversa sit [1], punctum N cum puncto C non coincidet,) ac per N ipsi LM, ideoque & contingenti ICK, æquidistans ducta sit PQ. Cadet itaque [2] punctum C, adeoque recta ICK infra rectam PNQ: nimirum, versùs Ellipseos centrum. At verò & eodem modo [3] punctum N, ideoque recta PNQ, infra contingentem ICK: nempe, versùs idem centrum cadet, quod repugnat. Non contingit ergo ICK Ellipsin. Eadem de omnibus aliis est demonstratio, ac proinde constat propositum.

Corollarium.

[4] per Coroll. præcedens. *[5] per 4 Cor. 13 hujus.*

Constat itaque [4] in Ellipsi cuilibet tangenti parallelas, æquidistantes quoque esse diametro conjugatæ ei, quæ per tactum & centrum ducitur; ac proinde & ad diametrum per tactum ductam ordinatim applicari, atque ab illa bifariam dividi [5]. & contra, quæ per cujuscunque diametri terminum ducitur æquidistans cuilibet rectæ, per eandem diametrum bifariam sectæ, Ellipsin in eodem vertice contingere.

THEOREMA XVI.

Propositio 18.

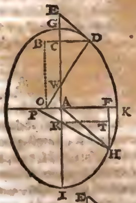
Si quælibet contingens productæ Ellipseos diametro cuicunque occurrat, atque à puncto contactus ad eandem diametrum recta ordinatim applicetur: erit rectangulum sub diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abscissis, semidiametri quadrato æquale, & contra.

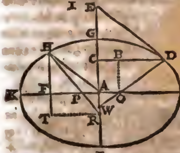
Quamcunque Ellipsin GD, cujus centrum A, contingat in puncto D, utcunque sumpto, recta DE, diametro IG occurrens in E; atque à puncto contactus D ad eandem diametrum ordinatim applicata sit DC: dico rectangulum CAE quadrato semidiametri AG æquale esse.

Sit enim primùm axis diameter IG, sitque OW *describens*, in statione uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum D; ita ut OD *intervallum* semi-axi AG æquale sit, PR autem *describens* in statione, ipsi OW reciprocâ; ita ut à curvæ puncto H, quod

nempe

nempe *describenti* PR in directum est, ducta diameter HA conjugata sit ei, quæ per D & A duceretur [1], ideoque & contingenti DE parallela [2]. Sitque porrò ad secundum axem AK applicata HF, ducanturque OB, RT ipsis AG, AK æquidistantes, quæ applicatis DC, HF, productis, si opus fuerit, occurrant in B & T.





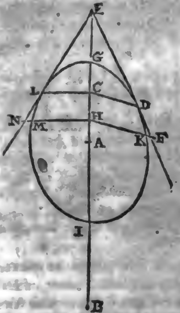
Itaque cum similia sint triangula OAW & RAP [3], erunt quoque triangula WCD & RTH, nec non OBD & PFH [4] similia. At verò & latera WD & RH, nec non OD & PH [5] æqualia sunt. Quare & latera WC & RT sive AF, necnon DB, & HF [6] æqualia erunt. Sunt autem porrò [7] triangula EDC & HAF æquiangula; unde ex antedictis erit [8] DC ad CW sive AF, id est [9], EC ad HF sive DB, uti eadem DB ad BO [10]. Unde cum proportionales sint EC, DB, BO, erit [11] ut EC ad BO sive CA, ita DB quadratum ad BO quadratum; & componendo [12], ut EA ad CA, ita [13] DO quadratum ad BO quadratum, hoc est, GA quadratum ad CA quadratum; ac proinde [14] & rectæ EA, GA, CA proportionales erunt, ideoque [15] rectangulum CAE quadrato semi-axis AG æquale. Cumque in puncto D alia recta præter ipsam DE Ellipsin contingere non possit [16], patet conversum quoque verum esse: nimirum, si rectangulum CAE æquale sit quadrato semi-axis AG, & per C ordinatim applicata Ellipsi occurrat in D, junctam ED esse contingentem.

Deinde non sit recta IG Ellipseos GD axis, sed alia diameter quæcunque, cujus parameter IB, atque ab assumpto in curva

[1] *per 4 Cor. 14 hujus.*
[2] *per Cor. 17 hujus.*
[3] *ex constructione.*
[4] *per 29 primi, & 21 sexti.*
[5] *ex constructione.*
[6] *per 26 primi.*
[7] *per 29 primi.*
[8] *per 4 sexti.*
[9] *propter triangula* EDC, HFA *æquiang.*
[10] *propter triangula* DCW, DBO *æquiangula.*
[11] *per Cor. 20 sexti.*
[12] *per 18. quinti.*
[13] *per 47 primi.*
[14] *per Cor. 20 sexti.*
[15] *per 17 sexti.*
[16] *per 17 hujus.*

utcunque puncto D ad eandem diametrum ordinatim applicetur D C, sitque quadrato semidiametri A G æquale rectangulum CAE: dico junctam E D, productamque, totam extra Ellipsin cadere, ideoque eandem in puncto D contingere, & conversim.

Sit enim in eadem E D, aut in ipsa producta, prout libuerit, assumptum utcunque punctum F, sitque per F ducta recta F H ipsi C D æquidistans, quæ dictæ diametro I G occurrat in H, Ellipsi verò G D in K. (Etenim si Ellipsi non occurreret, manifestissimè punctum F extra Ellipsin foret.) Deinde I G ut axe, eâdemque parametro I B, intelligatur descripta alia Ellipsis G L, ac per C & H ad eundem axem ordinatim applicentur C L, H M, quæ curvæ occurrant in L & M, jungaturque E L, (quæ utique Ellipsin G L in L continget [1],) eaque producta, si opus fuerit, productæ H M occurrat in N.



[1] per sup. demonstr.

Itaque quoniam est quadratum D C ad rectangulum G C I, ut quadratum L C ad idem G C I rectangulum, (quippe utriusque eadem est ratio, quæ parametri I B ad diametrum sive axem I G [2]:) erunt [3] quadrata D C, L C, ideoque & rectæ D C, L C æquales. Eodem modo, & rectis K H, M H æquales esse, demonstrabitur. At verò cum sit C D ad H F, ut C L ad H N, (siquidem [4] utriusque eadem est ratio, quæ rectæ E C ad rectam E H,) erunt quoque [5] H F & H N æquales. Est autem H N major applicatâ H M, cum contingens sit E L N: ergo & H F applicatâ H K major erit, ideoque punctum F, in recta E D F utcunque sumptum, hoc est, tota E D F, extra Ellipsin G D cadet, sive, quod idem est, eandem in puncto D continget. Cumque non possit præter E D F alia recta eandem Ellipsin in puncto D contingere [6], manifestum quoque est conversum: si nempe E D Ellipsin G D

[2] per 13 hujus, & Cor. 20 sexti.
[3] per 9 quinti.
[4] per 4 sexti
[5] per 14 quinti.
[6] per 17 hujus.

in

in D contingat, diametroque G I occurrat in E, & ad eandem diametrum ordinatim applicata fit D C, rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale esse.

Corollarium.

Ex dictis perspicuum est, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda sit recta, quæ Ellipsin contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti D: jam supra[1] ostensum est, quo pacto per dictum punctum contingens ducatur. Quod tamen & hoc quoque modo per præcedens Theorema perficietur.

Ductâ ex D ad inventam[2] diametrum G I rectâ ordinatim D C, fiat rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale, jungaturque E D.

At si extra Ellipsin sit datum punctum, ut E: ductâ ad A centrum[3] rectâ E A, quæ Ellipsin secet in G, quadrato A G æquale fiat rectangulum E A C; ac per C ductâ ordinatim applicatâ C D: nimirum, quæ[4] æquidistet contingenti quæ per G duceretur[5], occurratque Ellipsi in D, jungatur E D: eritque hæc ipsa tam priori quàm posteriori casu[6] contingens quæsita.

A puncto autem intra Ellipsin dato non posse duci rectam, quæ eandem contingat, manifestissimum est.

Atque ita me compendiosè viâ satis planâ ac maximè naturali, absque ulla solidi consideratione, Elementa proprietatesque præcipuas Curvarum, quas Veteres *Coni sectiones* appellavêre, tradidisse confido. E quibus principiis cætera omnia, quæ ad Parabolam, Hyperbolam, vel Ellipsin pertinent, absque ulteriori manuductione facillimè deducet, quicunque animum iis debitè applicuerit, atque in Geometricis per se ad ulteriora progredi valeat. Adeò ut eadem tractandi methodo hisce diutiùs inhærere supervacuum putem; præsertim cum insignis & sublimior quædam scientia supersit, cui Veteres enixissimè incubuisse ex quorundam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarum fragmentis manifestum est; quæque tam ab iisdem

Ff 2 quàm

[1] in Cor. 16 hujus.
[2] per 2 Cor. 15 hujus.
[3] inventum per 2 Coroll. 15 hujus.
[4] juxta Cor. 17 hujus.
[5] per præcedentia, aut 5 Coroll. 14 hujus.
[6] per 18 hujus.

quàm à Recentioribus *Locorum Inventio* sive *Compositio* appellata fuit. Ad quam promovendam, ab Apollonio cæterisque Geometris ea præcipuè conscripta esse, quæ in Conicorum tractatione prædictis Elementis superaddidère, omnino credibile est. Cumque penitiorem curvarum linearum notitiam perfectamque earum enumerationem ac distinctionem, ut & distributionem in sua genera & species, cum segregatione earum, quæ verè Geometricæ non sunt, ab iis quæ in Geometriam sunt recipiendæ, ex accurata *Loci* tractatione imprimis petendam existimem; è re fore duxi, eandem tractationem hic subjungere, non quidem eâ methodo, sicut à Veteribus inchoata videtur, cum vix integrum & ingens volumen eidem sufficeret, si vel tantùm *Locorum*, quæ *Plana*, ac *Solida* (quamvis, meo judicio, minùs rectè,) vocârunt, id est, quæ vel *Recta linea*, vel *Parabola*, vel *Hyperbola*, vel *Ellipsis*, sive *circuli circumferentia* existunt, (quorumque Locorum Compositioni eos solummodo intentos fuisse invenimus,) doctrinam exactè complecteretur, atque id porrò volumen in immensum excresceret, si ad Loca, quæ sunt lineæ curvæ secundi generis, uti nobis propositum est, extenderetur; sed Arte Analyticâ per Æquationum examen & præcepta generalia, quibus omnes omnino casus possibiles resolvantur ac determinentur. In quibus pertractandis eum ordinem sumus observaturi, ut jam post explicationem Elementorum Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipsis, (suppositâ notitiâ eorum, quæ ad linearum rectarum, angulorum, & figurarum rectilinearum, nec non Circulorum naturam pertinent) inventionem ac determinationem tradamus eorum *locorum*, quæ vel rectæ lineæ sunt vel ex prædictis curvis constant; (Illa autem & nobis, ne quid temerè mutemus,

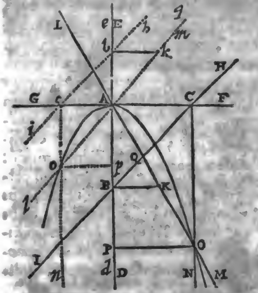
mus, *Locorum Planorum*, *Solidorumq;* nomine venient) atque eo ipso ostendamus in primo curvarum genere, præter Circulum, non nisi Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin esse recipiendas. Tractationi autem ulteriorum locorum, quæ pertinent ad lineas curvas secundi generis, similiter quoque earundem curvarum Elementa præmittemus. Cum verò ad ipsarum generationem viam sternant non tantùm descriptiones linearum curvarum primi generis, hoc libro propositæ atque explicatæ, sed & multi alii illas in plano describendi modi; operæ pretium duximus eorundem modorum, qui certè infiniti sunt, ut quilibet huic speculationi intentus facilè experietur, vel illos saltem hic adjungere, quos aut ad descriptiones curvarum secundi generis auxilio nobis fore, aut Mechanicæ curvarum primi generis in plano delineationi præcedentibus aptiores judicamus.

CAPUT IV.

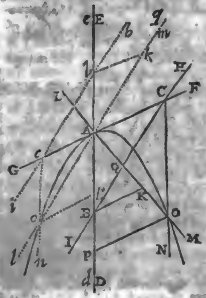
Alia Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin in plano delineandi Methodus.

SIt triangulum quodcunque isosceles ABC, & tam æqualia crura AB, AC, quàm basis BC utrinque indefinitè producantur, ut ad D, E, & F, G, nec non HI; sitque ab alterutro angulorum ad basin ducta quævis recta terminata, opposito cruri æquidistans, ut BK, & per terminum ejusdem K altera recta, utrinque indefinitè extensa, liberè transeat, quæ circa verticem anguli reliqui, nempe punctum A, ut Polum, circulariter mobilis sit, veluti LAKM; ac denique rectæ FG insistens CN ipsi DE parallela transeat per ipsarum FG & HI intersectionem C. Dico, si angulus EBH atque ipsi ad verticem DBI cum recta BK moveatur in utramque partem, ita tamen ut crus AB semper applicatum maneat rectæ DE, simulque recta HI huc atque illuc promoveat rectam CN, sibi ipsi semper æquidistantem,

tem, ac recta BK ad polum A circulariter moveri faciat prædictam LM, per punctum K semper transeuntem, intersectionem ipsarum CN, LM, quæ fit ad O; Parabolam describere, cujus diameter est AD, parameter KB, ac FG eandem contingens in vertice A.



In quacunque enim statione constitutus fuerit angulus EBH seu DBI, si intersectio rectarum FG, HI designetur per C, atque ab intersectionis puncto O ad diametrum applicata sit OP ipsi FG æquidistans: erit semper KB ad BA, hoc est, ad AC, uti eadem AC ad CO[1]; ac proinde[2] rectangulum sub KB, CO, id est[3], sub KB, AP quadrato rectæ AC, hoc est[4], ipsius OP æquale. Unde si BAC angulus rectus fuerit, erit AD axis, sin minùs diameter, ad quám ordinatim applicatæ faciunt angulos ipsi BAC vel BAG angulo æquales.



1 per 29 primi, & 4 sexti.
2 per 17 sexti.
3 per 34 primi.
4 per eandem.

In transitu etiam hic notandum est, eodem illo motu per intersectionem ipsarum HI, LM, puta Q, Hyperbolam sive oppositas

positas Hyperbolas describi; ut &, quamvis triangulum BAC isosceles non foret, nec etiam recta BK ex angulari puncto B sed ubivis in recta AD educta esset, nihilominus tamen curvam AO Parabolam fore; at verò nec parametrum priori, nec verticem, nec diametrum posteriori casu easdem remanere, quas tamen illis quoque casibus determinare facillimum est.

Quoniam autem circa finem capitis primi monuimus, curvam, juxta definitiones in principio ejusdem capitis propositas, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descriptam, si *anguli mobiles* inæquales sint *iis qui ad directricem* sunt ab eadem parte, Hyperbolam esse, idque mechanicæ ejusdem in plano delineationi non inutile judicamus; idcirco id demonstratione jam comprobandum duximus, simul ostensuri, quo pacto eadem Methodus ad prædictas Hyperbolarum delineationes commodè applicetur.

Sit itaque *efficiente* IG, *intervallo* AL, & *directrice* KLO, angulis autem IAL & KLA inæqualibus, descripta curva DAM: dico eandem curvam Hyperbolam esse; ac si ductâ à *Polo* A ad *directricem* rectâ AK, ita ut angulus LAK angulo LAG æqualis sit, centro A & intervallo AK circulus describatur, secans *efficientem* in I & G, ac *directricem* in K & Q [a], perque puncta I & K, nec non per G & Q ducantur rectæ IK, GQ, sibi mutuò occurrentes in F, rectas FI, FG Asymptotos esse [b].

Sumpto enim in curva puncto utcunque, veluti D, applicetur tam *angulus mobilis*, ut OAD, quàm *describens*, ut OD, in statione uti fuêre, cùm per eas descriptum est punctum D. Quoniam igitur æquales sunt anguli AIK, AKI inter se [1], nec non simul sumpti angulo KAG, (quippe tam posterior quàm priores [2] cum angulo IAK binos rectos constituunt): erunt quoque anguli AIK seu AIF & GAL, utpote æqualium dimidia, inter se æquales, ac propterea [3] rectæ IKF & AL parallelæ [c]; ideoque sicut IKF rectæ FG occurrit, ita & eidem FG occurrent

[a] aut eandem in K contingens, uti in casu fig. V exhibito.

[b] si verò dictorum punctorum bina coïncidant velut I & K in III, ac G & Q in IV fig. tangat ibidem circulum recta, ut IF, in priori, & GF in posteriori eum contingere cernitur.

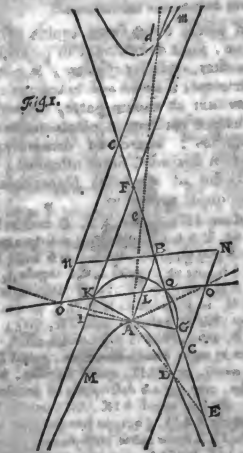
[1] per 5 primi. [2] per 13 & 32 primi. [3] per 28 primi.

[c] in casu fig. III, quoniam uterque angulorum AIF & GAL rectus est, rectæ IF, AB parallelæ erunt.

rent describentes A L & O D, utpote ipsi IKF æquidistantes. Sint itaque ipsarum occursus in B & C, ac per B agatur recta BN directrici KO æquidistans, occurrensque describenti D O in N: eritque ut GA ipsi AI, ita [1] GB ipsi BF æqualis. Cum

[1] per 2 sexti, & 14 quinti.

Fig. I.

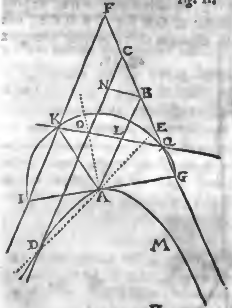


autem in triangulis LAK, OQC æquales sint anguli ad L & O, (propter [2] AL, CQ parallelas,) sitque & angulus LAK sive GAL, id est, GIF, æqualis angulo OQC, (quippe tam hic quàm ille cum angulo KQG, vel KQE duos rectos constituit

[2] per 29 primi.

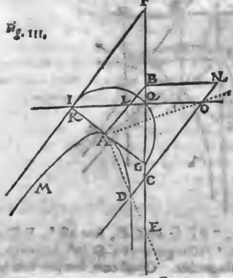
tuit[1],) [d] æquiangula erunt eadem triangula LAK & OQC

Fig. II.



five [2] NBC. Porrò, quoniam angulus AGE angulo IKO seu ALO æqualis est, (quippe tam hic quàm ille cum angulo IGQ five IGF [3] binos rectos constituit [e],) atque angulis LAG, OAD vel OAE iisdem five æqualibus addito vel ablato comuni OAG [f], compositi vel residui LAO, GAD vel GAE æquales quoque sunt, ac LO, AO sibi mutuò occurrant; GE quoque & AD sibi mutuò occurrant necesse est; sit itaque ipsarum occursus E punctum; & æquiangula erunt triangula, AGE, ALO, eritque propterea [4] AL ad AG, ut LO five NB ad GE. At verò (ob

Fig. III.



[1] *in I & II fig. per 13 primi, & 22 tertii. in IV per 13 primi, & 18 ac 31 tertii.*

[d] in casu fig. III apparet, tam angulum OQC quàm LAK rectum esse, per 13 primi, & 31 tertii: ac in fig. V & VI angulos GIF & OQC æquales, per 32 tertii & 21 ejusdem.

[2] *per 29 primi.*

[3] *in fig. I, per 13 primi & 22 tertii; in fig. III, per 13 primi & 31 tertii; in fig. IV per 13 primi, 18 & 31 tertii; in fig. V per 13 primi & 32 tertii; in fig. VI, per 13 primi, quoniam angulo* IGQ *æqualis est* IKQ *per 21 tertii.*

[e] in fig. II angulus AGE angulo ALO est æqualis, quia uterque cum angulo IKQ duos rectos constituit, per 29 primi & 22 tertii.

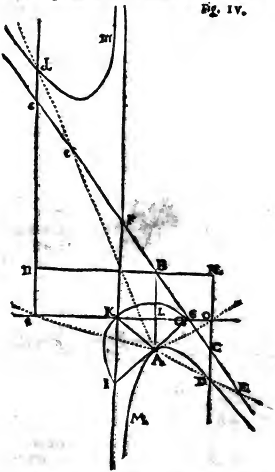
[f] vel, in casu fig. II & similibus, BAE.

[4] *per 4 sexti permut.*

[1] per sup. dem. [2] per 4 sexti. [3] per 11 quinti. [4] per 9 quinti. [5] per sup. demonstr.

(ob triangula LAK & NBC [1] similia) est quoque [2] eadem AL ad AK, hoc est, ad eandem AG, ut NB ad BC. Unde per consequens erit [3], ut NB ad GE, ita eadem NB ad BC. Ac proinde [4] rectæ GE & BC, ideoque & GB seu [5] FB & CE, nec non BE & FC æquales erunt. Denique cum, propter triangula

Fig. IV.



[6] per 29 primi. [7] per 4 sexti. [8] per sup. demonstr. [9] per 16 sexti.

ABE & DCE [6] similia, [7] BE sit ad CE, hoc est [8], FC ad FB, ut BA ad CD: erit [9] rectangulum FCD sub extremis æquale rectangulo FBA sub mediis. Quod cum semper accidat, ubi-

ubicunque in curva assumptum fuerit D punctum, sequitur [1] curvam D A M Hyperbolam esse, cujus Asymptoti F I, F G. Quod erat ostendendum. [1] per 3 hujus.

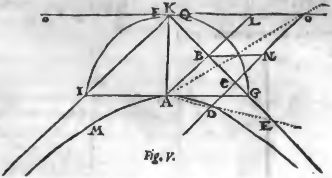


Fig. V.

Ex antedictis manifestum est, si *efficiens* seu [2] contingens, ut I G, ad Asymptotorum alterutram perpendicularis sit, veluti in tertia & quarta figura, vel *angulos mobiles* L A I & L A G rectos fore, si nempe *intervallum*, ut A L, æquidistans ductum sit ei Asymptoto cui *efficiens* seu contingens I G ad angulos rectos occurrit, ut [2] per 6 hujus.

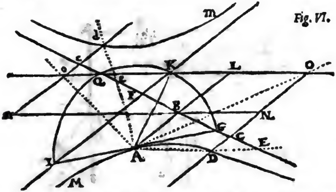


Fig. VI.

in tertia figura, vel certè *describentem* ad *directricem* fore perpendicularem, si nempe *intervallum* parallelum fuerit ei Asymptoto, cui eadem *efficiens* seu contingens G I occurrit ad angulos obliquos, ut in quarta figura.

Itaque si vel Asymptotis F I, F G, & contingente I G; vel dia-

metris conjugatis H A, I G, Hyperbola sit describenda, ductis in casu posteriore Asymptotis F I, F G, diametro I G circulus describatur, qui secet utramque Asymptoton, puta

Fig. I.

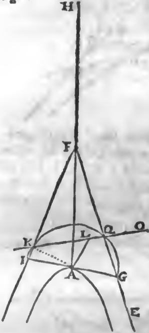


Fig. II.

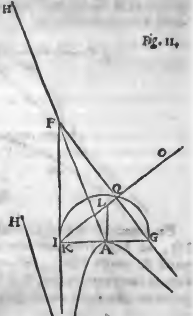
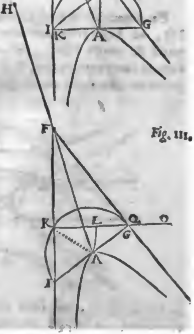


Fig. III.



a aut alteram tāgat, & alteram secet, ut in II fig. fit in I & Q, ac in III fig. in G & K.

in K & Q a, ductâque per K & Q rectâ K O, cui ducta A L, Asymptotorum alterutri, ut F I, æquidistans, occurrat in L: facillimè colligitur ex præmissis, si, *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O, curva describatur, eandem fore Hyperbolam, quæ delineanda proponitur.

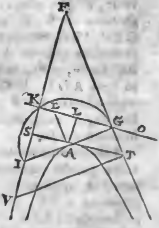
Nonnunquam tamen, ut obliquos circumferentiæ & rectarum occursus evitemus, hæc eadem absque Circuli descriptione efficere expediet.

Ita-

Itaque si, ductâ A L Asymptotorum alterutri, ut F I, parallelâ, ad eandem Asymptoton ducatur A K, ita ut L A K angulus angulo L A G æqualis sit, & per K recta K O secans prædictam A L in L, ita ut angulus F K O angulo F G I æqualis sit: erit curva, *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O descripta, ea ipsa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum descriptiones non inutile fore judicavimus paucis hîc ostendere, quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *describens* ad *directricem* sit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo describenda sit in plano Hyperbola, cujus Asymptoti sint F S, F T, quamque contingat recta S T, utrinque Asymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Asymptoton perpendiculari, uti T V, quam ad F T angulos rectos efficere supponimus, eidem T V per punctum I (nempe ita sumptum ut I F inter V F & S F media sit proportionalis) agatur æquidistans I G, quæ continget quoque Hyperbolam quæsitam [1], propterea quòd sit V F ad I F, hoc est [2], I F ad S F, uti [3] T F ad G F. Ideoque descripto super eandem I G circulo I K G, qui tangat Asymptoton F T in G [4], atque alteram secet in K, si per K & G ducatur recta K G O, eidemque occurrat ducta ab A, puncto medio tangentis I G, recta A L in L, quæ quidem A L vel ad eandem I G, vel ad ductam K O sit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ *efficiente* I G, *directrice* K O, atque *intervallo* A L, ad eandem *efficientem*, dictamvé *directricem* perpendiculari, describitur, juxta ea quæ modò exposita sunt, hæc ipsa, quæ delineanda proponitur.



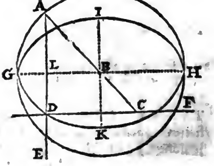
[1] per 9 hujus.
[2] ex hypothesi.
[3] per 2 sexti, & componendo per 18 quinti.
[4] per Cor. 16 tertii.

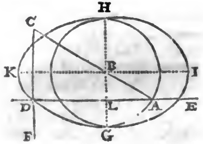
Similiter & vel datis quibuslibet *angulis mobilibus*, vel

ita ut *describens* ad *directricem* datos quoslibet angulos efficiat quamcunque Hyperbolam in plano delineare haud difficile erit.

Cæterùm sequentem quoque Ellipsin in plano describendi rationem hic adjecisse suum aliquando usum habebit.

Recta linea, ut ABC, ad polum B circulariter mota binis sui punctis A & C, in eadem utcunque assumptis (sive B sit inter A & C, sive C sit inter A & B,) promoveat rectas ADE, DCF, sibi ipsis semper æquidistantes, ac se invicem ad rectos angulos intersecantes: dico curvam, quæ continuâ earundem intersectione, veluti D, describitur, Ellipsin esse, cujus centrum est B, & axes GBH, IBK, nempe magnitudine ipsarum AB, BC duplæ, positione verò ipsis ADE, DCF, æquidistantes per B polum ductæ, atque ibidem bifariam divisæ.





Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, applicentur ipsi *describentes* ADE, DCF in statione uti fuêre, cùm per illarum intersectionem descriptum est punctum D; noteturque porrò punctum, ubi earum alterutra, veluti ADE, vel hanc vel illam ductarum GH, IK, ex. gr., ipsam GH, secat, ut in L. & sit GAH circumferentia Circuli, qui per motum puncti A describitur. Quoniam itaque est [1] AB quadratum ad BC quadratum, hoc est, GB quadratum ad BK quadratum, ut AL quadratum sive [2] GLH rectangulum ad LD

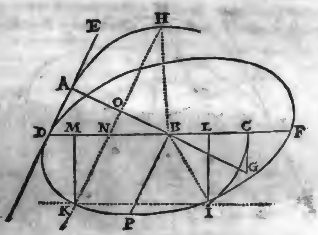
qua-

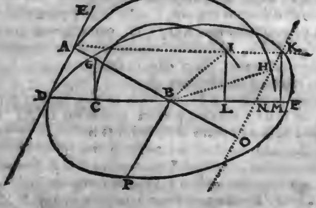
[1] *per 2 & 22 sexti.*
[2] *per 14 secundi, vel 35 tertii.*

quadratum: constat [1], curvam GKH, ut prædictum est, descriptam Ellipsin esse, cujus axes sunt GH, IK.

Manifestum autem est, si puncta A & C æqualiter à B Polo distent, prædictam curvam Circuli circumferentiam fore.

Non sit deinde ABC una linea recta, sed angulus quicunque, sive obtusus, sive acutus ABC, sintque prædictæ rectæ DAE,



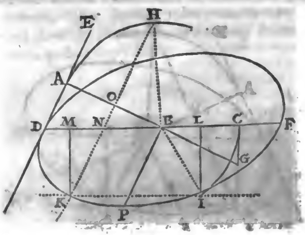


DCF in punctis A & C ita junctæ, ut, cùm earum altera; uni

cuiu-

[1] per 13 hujus.

cruri coïncidit, (quemadmodum in statione A B C rectæ D C F coïncidit cruri B C,) altera ad reliquum crus sit perpendicularis, (sicut in eadem statione recta D A E ad crus A B perpendicularis est:) dico iterum, si angulus A B C circa Polum B circulariter motus punctis A & C in utroque crure utcunque assumptis promoveat rectas D A E & D C F sibi ipsis semper æquidistantes, cur-



vam, continuâ ipsarum intersectione, veluti D vel K, descriptam, Ellipsin esse, cujus semi-diametri magnitudine sunt rectæ D B, B G, nempe dictorum crurum, si opùs fuerit, productorum, portiones à perpendicularibus A D, C G, per assumpta puncta A & C reciprocè ductis, ad Polum interceptæ; & quidem altera, uti D B, etiam positione; altera verò, ut B G, non item, sed B P ipsi æqualis, rectæque D A E æquidistans.

Sit enim prædictus A B C angulus in alia statione utcunque, ex. gr., in H B I; ideoque præfata intersectio ad K. Demissis autem ab I & K ad rectam D F, ipsius D B duplam, perpendicularibus I L, K M, notatisque intersectionum punctis ad N & O, quoniam æquales sive iidem sunt angulus A B C sive O B L & H B I, erunt quoque, addito vel ablato communi H B F, anguli H B O & I B L æquales[1]; ideoque triangula H B O & I B L, ob angulos præterea ad O & L rectos[1], æquiangula. Sunt autem[2] &

[1] ex hypothesi, & per 29 primi.
[2] per 21 sexti.

& æquiangula triangula CBG & MNK, cum tam hoc quàm illud triangulo OBN simile sit [1]: quare cum sit [2] DB quadratum ad NB quadratum, ut AB quadratum, id est [3], HB quadratum, ad OB quadratum, erit [4] per conversionem rationis DB quadratum ad DNF [5] rectangulum, sicut HB quadratum ad HO [6] quadratum, id est [7], uti BI quadratum ad IL quadratum, vel uti BC quadratum ad KM quadratum [8], id est [9], uti BG sive BP quadratum ad KN quadratum, & permutando [10] DB quadratum ad

[1] ob angulos ad C, O, & M rectos ad B verò & N sive eosdem sive ad verticem. [2] per 4 & 22 sexti. [3] ex hypothesi. [4] per Cor. 19 quinti. [5] per 5 secundi. [6] per 47 primi. [7] per 4 & 22 sexti. [8] æquales est enim BC ipsi BI, & IL ipsi KM. [9] per 4 sexti, propter triangula CBG & MKN æquiangula. [10] per 16 quinti.



BP quadratum, ut DNF rectangulum ad KN quadratum. Ac proinde Ellipsis est curva DKPF, intersectione uti prædictum est descripta [11], cujus semi-diametri conjugatæ DB, BP; ideoque B centrum, ac DAE contingens Ellipsin in vertice D [12].

[11] per 13 hujus. [12] per 2 Cor. 13 hujus.

Notandum hic est, quòd si rectus foret ABC angulus, intersectione, uti prædictum est, non curvam, sed rectam lineam describi.

Quemadmodum autem Ellipsin, quæ superiùs per motum puncti in una eademque recta descripta fuit, nunc per duarum rectarum intersectionem delineavimus,

mus, ita & Parabola Hyperbolaque, quarum generationes solummodo per similes intersectiones in præcedentibus exposuimus, per motum puncti in una eademque recta describi possunt. At verò quoniam prædictarum curvarum generationes, ut jam ante quoque monuimus, infinitæ sunt, atque earum facillimas quidem ac maximè naturales à nobis jam propositas existimamus, hisce diutiùs inhærendum non videtur; itaque ad *Locorum Planorum*, *Solidorumq;* inventiones ac determinationes progredimur.

JO-

JOHANNIS DE WITT ELEMENTA CURVARUM LINEARUM,

LIBER SECUNDUS.

CAPUT I.

PROPOSITIO GENERALIS.

IN omni quæſtione, ubi indagandus proponitur Locus, ſive is ſit ad lineam rectam, ſive ad curvam, ſuppoſitis duabus lineis rectis incognitis atque indeterminatis, datum vel aſſumptum angulum comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, devenitur ad Æquationem, aſſumptum quodlibet quæſiti Loci punctum determinantem; in qua quidem æquatione, poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos erit reducta, ſi neutra incognitarum ad duas pluréſve dimenſiones aſſurgat, hoc eſt, ſi neque in ſe, neque in alteram incognitam ducta ſeu multiplicata reperiatur, quæſitus Locus erit linea recta; At ſi earundem incognitarum altera ad quadratum aſcendat, altera verò non item, ſed neque in ſe, neque in alteram incognitam ducta ſit, erit Locus quæſitus Parabola. Quòd ſi verò utraque ad quadratum aſcendat, ſive altera in alteram ducta in æquatione reperiatur (altiùs enim æquatio non aſſurget, ſi de loco Plano Solidové quæſtio ſit): erit Locus quæſitus vel Hyperbola, vel Ellipſis, vel Circuli circumferentia.

Quorum quidem omnium particularis determinatio, descriptio, & demonstratio variis modis fieri potest; at verò ex simplicissimis, generalissimisque aliquem annotasse suffecerit.

Ac primo quidem casu, cùm neutra quantitatum incognitarum ad duas pluresve dimensiones ascendit, si earum una exprimatur per x, atque altera per y, potest æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci.

I. $y \propto \frac{bx}{a}$, sive (posito $a \propto b$) $y \propto x$.

II. $y \propto \frac{bx}{a} + c$, sive, posito, ut supra, $y \propto x + c$.

III. $y \propto \frac{bx}{a} - c$, sive $y \propto x - c$.

IV. $y \propto -\frac{bx}{a} + c$, sive $y \propto -x + c$.

Fiat autem earundem quantitatum incognitarum secundùm regulam talis assumptio, ut initium unius, verbi gratiâ, ipsius x, certum sit & immutabile, utque eadem illa quantitas ex certo & immutabili illo initio in linea recta positione data intelligatur indefinitè extendi, altera verò indeterminatæ quoque longitudinis lineæ priori in extremitate incerta in dato vel assumpto angulo conjungi. Quibus quidem suppositis, ea, quæ prædicta sunt, sequentibus Theorematis non incongruè proponi, determinari, ac demonstrari posse videntur.

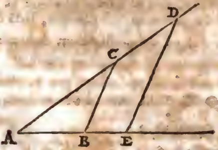
THEOREMA I.

Propositio I.

Si æquatio sit $y \propto \frac{bx}{a}$, erit locus quæsitus linea recta.

Sit enim ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur. Dein, sumpto in eadem AB puncto utcunque, veluti B, agatur BC in angulo

angulo ABC, ipsi dato vel assumpto æquali; ita ut eadem sit ratio interceptæ AB ad ductam BC, quæ est a cognitæ ad b cognitam: hoc est, ut sit uti a ad b, ita AB ad BC. Denique per puncta A & C ducatur recta AC, indefinitè extensa; eritque hæc ipsa locus quæsitus.



Etenim assumpto in AC puncto utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo DEA, dato vel assumpto æquali, si eadem DE vocetur y, erit [1] ut AB ad BC, hoc est, ut a ad b, ita AE ad ED, hoc est, ita x ad y. Et fit [2] $ay \infty bx$, hoc est, dividendo utrinque per a, erit $y \infty \frac{bx}{a}$.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.

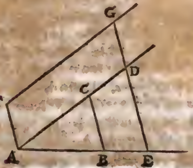
[2] per 16 sexti.

Quare cum punctum D utcunque sumptum sit in linea AC, erit eadem de omnibus aliis lineæ AC punctis demonstratio, ac proinde ipsa AC locus est quæsitus. Atque ita non solùm Theorematis propositi veritas demonstrata, sed & Locus quæsitus determinatus est.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si æquatio sit $y \infty \frac{bx}{a} + c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut supra, agatur insuper ex A recta AF ipsi BC parallela, atque ad easdem cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ FG parallelâ AC, dico eandem FG esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in FG puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG, dato

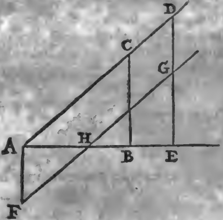
dato vel assumpto æquali, quæ secet rectam AC in D, si eadem GE vocetur y, erit ED $\infty\ y - c$. At verò est, ut supra [1], uti AB ad BC, ita AE ad ED, hoc est, ut a ad b, ita x ad $y - c$: ac propterea [2] $ay - ac \infty bx$, vel $ay \infty bx + ac$, adeoque, factâ divisione per a, $y \infty \frac{bx}{a} + c$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 16 sexti.

THEOREMA III

Propositio 3.

Si æquatio sit $y \infty \frac{bx}{a} - c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis factisque ut in Theoremate 1mo, agatur insuper ex A recta AF, ipsi BC parallela, atque ad oppositas cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ iterum FG ipsi AC parallela, secante rectam AB in H, dico HG esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem puncto utcunque veluti G, ductâque GE in angulo AEG, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet AC in D, si eadem GE vocetur y, erit ED $\infty\ y + c$. Jam verò est [3] ex constructione, ut AB ad BC, ita AE ad ED, hoc est, ut a ad b, ita x ad $y + c$: ac propterea [4] $ay + ac \infty bx$, vel $ay \infty bx - ac$, adeoque, factâ divisione per a, $y \infty \frac{bx}{a} - c$. Quod est propositum.

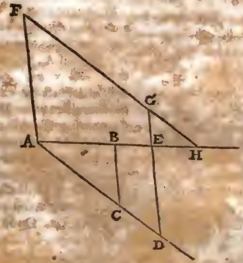
[3] per 29 primi, & 4 sexti.
[4] per 16 sexti.

THEO-

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Si æquatio sit $y \infty c - \frac{bx}{a}$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut in Theoremate 2do, excepto quòd punctum C ab opposita parte ipsius AB cadat, quodque angulus ABC æqualis sit dati vel assumpti anguli ad binos rectos complemento, quemadmodum in adjuncta figura apparet, agatur ex F recta FG ipsi AC parallela, occurrens rectæ AB in H: dico FH esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in FH puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet AC in D, si eadem GE vocetur y, erit ED $\infty c - y$. Cumque sit [1] ex constructione, ut AB ad BC, ita AE ad ED, hoc est, ut a ad b, ita x ad $c - y$: erit propterea [2] $ac - ay \infty bx$, vel $ay \infty ac - bx$, id est, dividendo utrinque per a, $y \infty c - \frac{bx}{a}$. Quod erat propositum.

[1] per 13 & 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 16 sexti.

At verò fieri etiam potest, ut per operationem, priusquam ad æquationem deveniatur, quantitatum incognitarum altera penitus evanescat, alteraque sola alicui cognitæ quantitati æqualis remaneat; atque exin-

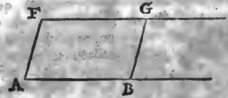
exinde binæ insuper formulæ nascuntur, quæ huc referri debent: nimirum,

1. $y \propto c$, vel
2. $x \propto c$.

THEOREMA V.

Propositio 5.

Si æquatio sit $y \propto c$, Locus quæsitus est linea recta.



Sit quantitatis x, quæ per operationem evanuit, initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur. Deinde ex A ductâ AF $\propto c$, faciente cum AB angulum, ipsi dato vel assumpto aut ejusdem ab binos rectos supplemento æqualem, si ex F agatur FG ipsi AB parallela, dico eandem FG esse Locum quæsitum.

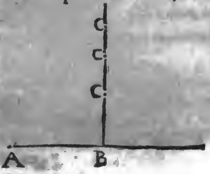
Etenim assumpto in FG puncto utcunque, veluti G, ductâque GB ipsi AF parallelâ, apparet eandem GB omnesque ipsi æquidistantes [1] rectæ AF fore æquales, hoc est, esse $y \propto c$. Quod erat demonstrandum.

[1] per 34 primi.

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Si æquatio sit $x \propto c$, erit Locus quæsitus linea recta.



In linea AB, quæ, ut supra, pro x concepta sit, sumatur à puncto A longitudo AB æqualis c cognitæ, atque ex B in dato vel assumpto angulo ducatur recta BC, dico eandem BC, indefinitè productam, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem puncto

cto utcunque, veluti C, erit ex hypothesi CB cum priore AB comprehendens angulum ABC dato vel assumpto æqualem, poteritque proinde eadem CB vocari y. At verò est ex constructione, & remanet semper AB, hoc est, $x \propto c$. Quod est propositum.

CAPUT II.

Porrò secundo casu, supra expresso, cùm nempe in æquatione, ad simplicissimos terminos reductâ, quantitatum incognitarum altera ad quadratum ascendit, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram quantitatem incognitam ducta reperitur: poterit æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & yy \propto ax \\ \text{II.} & yy \propto ax + bb \\ \text{III.} & yy \propto ax - bb \\ \text{IV.} & yy \propto -ax + bb \end{array}\right\} \text{vel conversim} \left\{\begin{array}{l} ay \propto xx \\ ay + bb \propto xx \\ ay - bb \propto xx \\ bb - ay \propto xx. \end{array}\right.$$

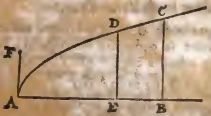
Supponendo y & x esse quantitates incognitas, vel ab initio conceptas, vel postmodum assumptas, ut mox latiùs explicabitur.

THEOREMA VII.

Propositio 7.

Si æquatio sit $yy \propto ax$, vel conversim $ay \propto xx$: erit Locus quæsitus Parabola.

Sit ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur, & sit datus vel assumptus angulus æqualis angulo ABC; Assumatur primò eadem AB ut Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant cum ipsa angulos æquales dato vel assumpto angulo ABC, cujusque latus rectum AF



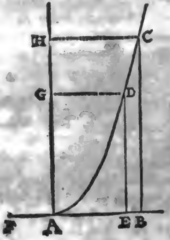
 sit

[1] per 10 Coroll. primi, & 4 Coroll. secundi hujus.

sit æquale a cognitæ. Dico Parabolam ADC, quæ [1] per prædictæ diametri verticem A descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens ∞a, esse Locum quæsitum.

Sit enim in eadem curva ADC assumptum punctum utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo AED dato vel assumpto æquali, si ipsa DE vocetur y, erit, ex natura Paraboles [2], quadratum ex ED ∞ FAE rectangulo, hoc est, $yy \infty ax$. Quod erat propositum.

[2] per 1 primi hujus.



Ad demonstrationem autem secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra suppositis, ducenda est ex A puncto recta AH ipsi BC parallela, atque eadem AH assumenda pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABC seu AHC æquales, ac cætera, ut supra, eritque Parabola ADC Locus quæsitus.

Est enim [3] quadratum ex GD sive AE quadratum æquale rectangulo sub FA & AG, seu FA & ED, id est, $xx \infty ay$. Quod erat demonstrandum.

[3] per 1 primi hujus.

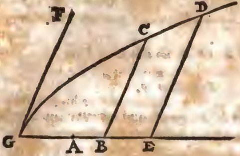
THEOREMA VIII.

Propositio 8.

Si æquatio sit $yy \infty ax + bb$ aut conversim $ay + bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus æqualis angulo ABC. Deinde producatur AB versùs A usque ad G, ita ut sit AG $\infty \frac{bb}{a}$; assumptâque GB pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto angulo ABC, cujusque latus rectum

rectum GF sit æquale a cognitæ: dico Parabolam GCD, quæ

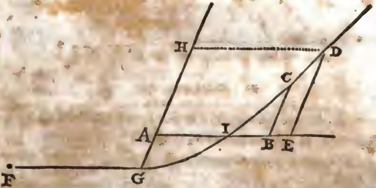


per prædictæ diametri verticem G descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens ∞a, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo AED, dato vel assumpto æquali, si ipsa DE vocetur y, quoniam GE sive AE + AG est $\infty x + \frac{bb}{a}$, atque ex natura Paraboles [1] quadratum ex ED ∞ rectangulo sub FG & GE, erit $yy \infty ax + bb$. Quod primò erat demonstrandum.

[1] per 1 primi hujus.

Ad explicationem verò secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta AH ipsi BC parallela; eâdemque productâ versùs A usque ad G, ita ut AG sit $\infty \frac{bb}{a}$, di-



co, si ad GH diametrum latere recto GF ∞a Parabola describatur ut GC, quæ secet rectam AB in I, curvam ID esse Locum quæsitum.

Est enim [2] ex natura Paraboles rectangulum sub FG & GH

[2] per 1 primi hujus.

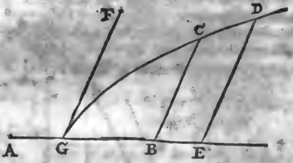
contentum æquale quadrato ex HD seu AE, ac proinde, quoniam GH, sive DE + AG, $\infty\, y + \frac{bb}{a}$, atque FG $\infty\, a$, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay + bb \infty xx$. Quod est propositum.

THEOREMA IX.

Propositio 9.

Si æquatio sit $yy \infty ax - bb$ aut conversim $ay - bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Suppositis iisdem, quæ in præcedenti Theoremate, auferatur ab AB recta AG $\infty \frac{bb}{a}$, fiantque cætera, ut ibidem dictum est: dico curvam GCD esse Locum quæsitum.

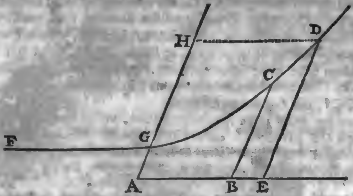


Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque DE ipsi CB parallelâ, si eadem DE vocetur y, erit ex natura Paraboles [1] quadratum ex ED seu yy æquale rectangulo sub FG & GE, id est, producto ex a in $x - \frac{bb}{a}$, nimirum, $ax - bb$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] per 1 primi hujus.

Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta AH ipsi BC parallela, atque ab ea subductâ AG $\infty \frac{bb}{a}$, sumatur GH pro diametro, &c. ut supra, dico curvam GCD fore Locum quæsitum.

Est



Est enim [1] ex natura Paraboles rectangulum sub FG & GH, contentum æquale quadrato ex HD seu AE, ideoque, quoniam GH sive DE — AG æquatur $y - \frac{bb}{a}$, atque FG ∞ a, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay - bb \infty xx$. Quod erat propositum.

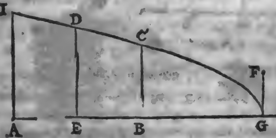
[1] per eandem.

THEOREMA X.

Propositio 10.

Si æquatio sit $yy \infty bb - ax$ aut conversim $bb - ay \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit enim, ut supra, ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturq; eadem x in recta AB indefinitè se ab A extendere versùs B; angulus verò datus vel assumptus esto æqualis angulo



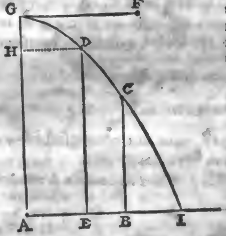
ABC. Deinde ab A versùs B assumptâ AG ∞ $\frac{bb}{a}$ sumatur GA

pro

pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto ABC, aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Quo facto, si per prædictæ diametri verticem G versùs A Parabola describatur, cujus latus rectum GF eidem diametro correspondens sit ∞a, quæque Parabola rectam AI ipsi BC parallelam secet in I: dico ejusdem Parabolæ portionem, inter verticem G & punctum intersectionis I interceptam, nempe curvam GCI, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque DE ipsi CB parallelâ, si eadem DE vocetur y, cum [1] ex natura Paraboles quadratum ipsius DE sit æquale rectangulo sub FG & GE, & GE sive AG — AE sit $\infty \frac{bb}{a} - x$, ac FG ∞a, factâ debitâ multiplicatione, erit $yy \infty bb - ax$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] per 1 primi hujus.



Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ex A ducatur AG ipsi BC parallela atque $\infty \frac{bb}{a}$, assumaturque GA pro diametro, &c. per omnia, ut supra, excepto quòd punctum intersectionis I sit in recta AE.

Cum enim ductâ DH ipsi AB parallelâ [2] ex natura Paraboles rectangulum sub FG & GH contentum sit æquale quadrato ex HD seu AE, sitque GH sive AG — ED $\infty \frac{bb}{a} - y$, atque FG ∞a, factâ multiplicatione, ut decet, erit $bb - ay \infty xx$. Quod erat propositum.

[2] per eandem.

Regula

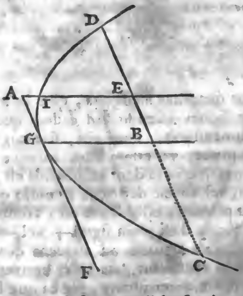
Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione producuntur, cùm Locus quæsitus est Parabola, ad aliquem quatuor casuum, præcedentibus totidem Theorematibus jam explicatorum.

Si contingat ut quantitas incognita, quæ in æquatione ad duas dimensiones ascendit, in eadem quoque inveniatur unius dimensionis, cum alia, sive cognita, sive incognita quantitate, vel etiam cum utraque planum aliquod faciens, loco ejusdem assumenda est alia, vel ipsam excedens, vel ab ea deficiens dimidio quantitatis, quacum illa planum, uti dictum est, constituere reperitur, pro diversa dicti plani signo + vel — affectione. Quo opere ipsa æquatio ad aliquem quatuor præcedentium casuum reducetur, ita ut ei convenientem lineam Parabolicam determinare, per ea quæ superiùs sunt explicata, haud difficile sit.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VII.

Si æquatio sit $yy + 2ay \propto bx - aa$; assumpto, juxta Regulam, $z \propto y + a$, erit $z - a \propto y$. Hinc si ubique in æquatione loco ipsius y substituatur $z - a$, ejusdemque quadratum loco yy: habebitur $zz - 2az + aa$, $+ 2az - 2aa \propto bx - aa$, hoc est, omissis iis quæ sese mutuò tollunt, erit $zz \propto bx$. Unde statim apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x intelligatur se ab A per rectam AE indefinitè extendere; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF. Deinde, quoniam z est $\propto y + a$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, ducenda est infra eam recta GB ipsi AE parallela, ita

ita ut pars rectæ AF, omniumque ipsi parallelarum, intercepta inter AE & GB, veluti AG, æquetur a cognitæ. Porrò prædicta GB assumenda est ut Parabolæ diameter, ad quam si per ejusdem verticem G, existente GF latere recto, ipsi diametro GB correspondente, ∞b Parabola describatur, secans rectam AE in I: dico curvam ID indefinitè versùs D productam esse Locum quæsitum.



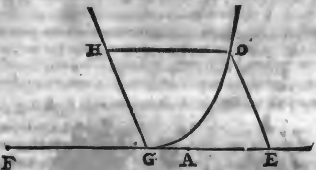
Etenim assumpto in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AF parallelâ, si eadem DE vocetur y, producaturque donec prædictæ diametro GB occurrat in B: erit ex constructione intercepta EB ∞a, ac proinde tota DB $\infty y + a$, hoc est, z. Quare cùm ex natura Paraboles quadratum ex DB æquetur rectangulo sub FG & GB, vel FG & AE: erit quoque $zz \infty bx$, sive, restituto $y + a$ loco z, $yy + 2ay + aa \infty bx$, id est, $yy + 2ay \infty bx - aa$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $yy - 2ay \infty bx - aa$, factâ assumptione secundùm Regulam, atque operatione, ut supra; deventum fuisset ad eandem æquationem, nimirum, $zz \infty bx$. Sed quoniam z eo casu juxta Regulam assumenda fuisset $\infty y - a$, idcirco quoque diameter GB (iisdem ut supra positis) non infra, sed supra rectam AE cecidisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo expedienda fuissent.

Si verò æquatio sit $by - aa \infty xx + 2ax$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \infty x + a$, erit $v - a \infty x$. Quare si loco ipsius x in æquatione substituatur $v - a$, atque hujus

hujus quadratum loco xx: erit $by - aa \infty vv - 2av + aa, + 2av - 2aa$, hoc est, omissis iis, quæ se mutuò tollunt, erit $by \infty vv$.

Unde statim apparet, reductam esse æquationem ad formulam prædicti Theorematis septimi conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A,

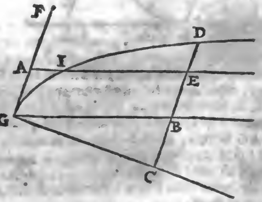


intelligaturque eadem x à prædicto puncto A per rectam AE indefinitè se extendere, sitque datus vel assumptus angulus, quem comprehendunt y & x, æqualis angulo AGH vel FGH. Deinde, quoniam v æquatur $x + a$, producenda est recta AE versùs A usque ad G, ita ut AG sit ∞a; & ex G ducenda est GH, faciens angulum EGH vel FGH dato vel assumpto angulo æqualem, ipsaque GH sumenda est pro Parabolæ diametro, ad quam si per ejus verticem G atque latere recto FG ∞b Parabola describatur, ut GD: dico curvam GD esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi HG parallelâ, si eadem DE vocetur y, cum GE sit $\infty x + a$ seu v, atque ex natura Paraboles FGH rectangulum ∞ quadrato ex HD sive GE, erit $by \infty vv$, sive, restituto $x + a$ loco v, $by \infty xx + 2ax + aa$, seu $by - aa \infty xx + 2ax$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $by - aa \infty xx - 2ax$, eadem per omnia mutatis mutandis secundùm Regulam instituenda fuisset operatio, cecidissetque eo casu punctum G inter A & E.

Eodem modo si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, assumpto juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$: erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$. Quo substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis sequentem formam induta erit superior æquatio: $zz \infty \frac{2bc}{a} x + bx$, aut $zz \infty dx$, si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d. Unde iterum apparet, æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x ab A puncto per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF vel EAG. Deinde quoniam z est $\infty y + c + \frac{bx}{a}$,



si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, veluti E D, ducenda primùm est infra eandem recta G B ipsi parallela, ita ut partes rectæ FG omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas AE & GB interceptæ, veluti AG, EB, æquentur c cognitæ. Quo peracto, cum quævis recta, quæ possit esse y, ad rectam GB producta, ut, exempli gratiâ, DB, sit $\infty y + c$, oportet ipsi adhuc adjungere $\frac{bx}{a}$, ut fiat æqualis z assumptæ. Quare, cum GB seu AE indefinitè sumpta sit ∞x, si ex G juxta I Theorema hujus libri infra eandem GB recta ducatur, ut GC; ita ut omnium ipsi GF parallelarum partes inter GB & GC interceptæ, veluti BC, ad partes ipsius GB inter G & dictas pa-

rallelas

rallelas interceptas, veluti BG, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a. Quod ipsum ut fiat, statuatur ut a ad b, ita GB ad BC: eritque BC $\infty \frac{bx}{a}$. Eodem modo rectæ omnes ipsi BC parallelæ, quæ à GB ad GC ducuntur, erunt $\infty \frac{bx}{a}$. Atque ita recta quælibet supra AE exsurgens, quæ possit esse y, postquam ad rectam GC erit producta, ut, exempli gratiâ, DC, erit $\infty\, y + c + \frac{bx}{a}$ seu z. Hujus igitur quadratum cum debeat esse $\infty\, dx$, statim inde apparet, si Parabola descripta foret ad diametrum GC, cujus latus rectum GF ita esset assumptum, ut rectangula, sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem & ordinatim applicatas interceptis, contenta, forent $\infty\, dx$, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ GB ad rectam BC, aliarumque similium, cognita sit, nempe, ut a ad b; sitque itidem notus angulus GBC, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto EAF: erit propterea quoque [1] nota ratio GB ad GC, aliarumque similium, quæ sit ut a cognitæ ad c cognitam. Hinc cum GB seu AE indefinitè sumpta exprimatur per x, erit GC itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\infty \frac{cx}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dx, idem quoque æquationis terminus dx per $\frac{cx}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est: ac proinde per eandem divisionem cognoscitur quæsitum latus rectum æquari $\frac{ad}{c}$. Sumptâ ergo GF $\infty \frac{ad}{c}$ pro latere recto, si ad diametrum GC, ut supra dictum est, describatur Parabola GID, secans rectam AE in I: dico curvam ID fore Locum quæsitum.

[1] per 6 sexti.

Atque hic, ut & in aliis similibus exemplis obiter notandum, si Parabola descripta prædictam AE non secaret, id certo indicio fore, quæstionem propositam, per quam legitimâ operatione ad supra expressam æquationem perventum fuerit, ejus esse conditionis, ut Locus ad indagandum propositus sui quidem naturâ

linea Parabolica existat; sed quòd nulla tamen quæstioni satisfaciens describi possit, cum propositæ quantitates, eo, ut petitur, modo, conjungi nequeant.

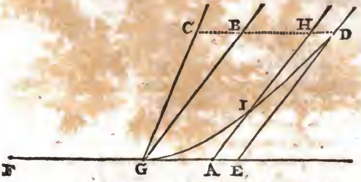
Ad demonstrationem autem eorum, quæ supra dicta sunt, sumatur in curva ID punctum utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi FG parallelâ, quæ protracta secet rectam GB in B, occurratque diametro GC in C, si DE vocetur y, cum EB seu AG sit $\infty\, c$, & BC $\infty\, \frac{bx}{a}$, erit tota DC $\infty\, y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z. Cumque ex natura Parabolæ quadratum ex DC ∞ FGC rectangulo, erit quoque ex antedictis $zz \infty dx$. Ac proinde substitutis aut restitutis $y + c + \frac{bx}{a}$ loco z, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, & ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, erit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Sin autem æquatio fuisset $yy - \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, factâ assumptione secundùm Regulam atque operatione uti decet, ad eandem æquationem perventum fuisset; sed quoniam z juxta assumptionem eo casu faciendam fuisset æqualis $y - \frac{bx}{a} - c$, idcirco quoque suppositis, ut ante, rectâ GB non infra sed supra rectam AE, ut & GC non infra sed supra eandem GB ducenda fuisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo fuissent expedienda.

Si verò æquatio sit $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \infty xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} + c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} - c$. Unde substituto hoc valore in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, superior æquatio sequenti formâ induta erit $\frac{2bc}{a} y + by \infty vv$, aut (si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d) $dy \infty vv$. Id quod rursus arguit æquationem propositam reductam esse ad formulam prædicti Theorematis VII conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad

Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à puncto A per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur, sitque da-



tus vel assumptus angulus EAH vel FAH. Deinde, quoniam ex secunda parte Theorematis VII constat, prædictam Parabolam ita esse describendam, ut ordinatim applicatæ ad ejus diametrum sint ipsi AE parallelæ, debeantque juxta æquationem propositam æquales esse quantitati assumptæ v, hoc est, $x + \frac{by}{a} + c$, ducenda primùm est recta GB ipsi AH parallela, ita ut pars rectæ EA, versùs A productæ, ut & omnium ipsi æquidistantium, velut AG vel HB sit ∞ c cognitæ. Quo facto, cum quævis recta, quæ possit esse ipsi AE æquidistans & æqualis, ac proinde exprimi per x, ut, verbi gratiâ, DH, ad rectam GB producta; uti DB, æquetur $x + c$: ita porrò è puncto G ducenda, &, secundùm ea, quæ in præcedentibus explicata sunt, constituenda est Parabolæ diameter ab adversa parte ipsius GB, quàm est punctum E in recta GC, ut, si GB indefinitè vocetur y, BC, aliarumque omnium ipsi AE parallelarum inter eandem GC & rectam GB interceptæ partes exprimantur per $\frac{by}{a}$. Atque ita quælibet recta ipsi AE parallela, quæ possit esse x ad rectam GC producta, veluti DC, sit ∞ $x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v. Cujus quidem quadratum cum æquale esse debeat alteri æquationis termino, nempe, dy: statim apparet, si Parabola descripta foret ad diametrum GC,

 cujus

cujus latus rectum GF ita esset assumptum, ut rectangula contenta sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem G & ordinatim applicatas interceptis, forent $\infty\, dy$, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ GB ad rectam BC aliarumque similium cognita sit, nimirum, ut a ad b; sitque itidem notus angulus sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto EAH: erit quoque [1] ratio ipsius GB ad GC aliarumque similium cognita, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Quocirca si GB sive ED indefinitè sumpta exprimatur per y, erit GC itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio, inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\infty\, \frac{ey}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dy, idem quoque æquationis terminus dy per $\frac{ey}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est. ac proinde factâ eadem divisione indicabit quotiens latus rectum quæsitum fore $\frac{ad}{e}$. Hinc, sumptâ GF $\infty\, \frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum GC inventam, ut supra dictum est, describatur Curva Parabolica GID, secans rectam AH in I: dico curvam ID fore Locum quæsitum.

[1] per 6 sexti.

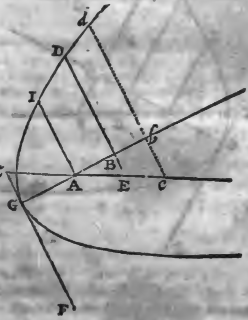
Sumpto enim in eadem puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AH, ut & DC ipsi AE parallelâ, quæ quidem DC secet rectas AH & GB in punctis H & B, occurratque diametro GC in puncto C: erit AE $\infty\, x \infty$ DH; ED $\infty\, y \infty$ GB; AG & HB $\infty\, c$; BC $\infty\, \frac{by}{a}$, ideoque tota DC $\infty\, x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v. Cumque ex natura Parabolæ rectangulum FGC sit æquale quadrato DC: erit, factâ multiplicatione $\frac{ad}{e}$ in $\frac{ey}{a}$, atque v in se ipsam, $dy \infty vv$. Et substitutis aut restitutis $x + c + \frac{by}{a}$ loco v, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, atque ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \infty\, xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

De cæteris autem casibus, ad prædictam formulam spectantibus, supervacuum fuerit plura exponere, cum ex prædictis facilè expli-

explicari, determinari, ac demonstrari queant; observatâ solummodo diversâ linearum positione, quæ ex signorum + & — differentia oriri debet, cumque omnes similium locorum casus mox per generalem Regulam sim exhibiturus.

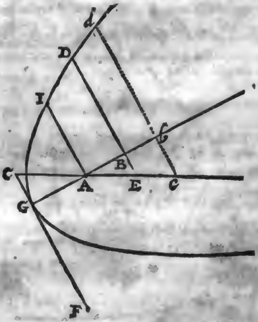
Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VIII.

Si æquatio sit $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, erit $y \infty z + \frac{bx}{2a}$. quo substituto in locum ipsius y, & ejusdem quadrato loco yy, omissisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta: $zz \infty bx + dd$.



Unde apparet, eandem esse reductam ad formulam Theorematis VIII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus particularem descriptionem esto in adjuncta figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à dicto puncto A per

per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AED. Deinde, quoniam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, veluti ED, ducenda quoque est supra lineam AE ex puncto A recta AB, ita ut eadem sit ratio AE ad EB, quæ est ipsius $2a$ cognitæ ad b cognitam, hoc est, ut sit uti $2a$ ad b, ita AE seu x ad EB, eritque EB $\infty \frac{bx}{2a}$. idem intellige de omnibus aliis rectis ipsi EB parallelis, atque inter AE & AB interceptis, quæ quidem singulæ ipsi $\frac{bx}{2a}$ erunt æquales. Hinc,



quemadmodum ex supra dictis patet, si terminus dd in æquatione deficeret, prædicta AB Parabolæ diameter foret, ejusque vertex punctum A, &, positâ ratione AE ad AB, ut $2a$ ad e, latus rectum ipsi correspondens esset $\infty \frac{2ab}{e}$. Jam verò cum rectangulum, quod sub latere recto & portione diametri, inter verticem atque ordinatim applicatas interceptâ, continetur, æquale esse debeat $bx + dd$; manifestum est, si, iisdem positis, diameter

AB

AB versùs A producatur ad G, ita ut rectangulum sub prædicto latere recto & parte GA contentum sit $\infty\ dd$, rectam GB quæsitam fore diametrum, ejusque verticem prædictum G punctum: ac proinde & dd per prædictum latus rectum, hoc est, per $\frac{2ab}{e}$, divisum æquari longitudini GA, ideoque GA fore $\infty\ \frac{dde}{2ab}$. Quare si diametro GB & latere recto GF $\infty\ \frac{2ab}{e}$ in dato angulo Parabola describatur GDd, secans AI ipsi ED parallelam in I: dico curvam IDd fore Locum quæsitum.

Verùm obiter hic quoque notandum venit, prædictum verticem G etiam inveniri hoc pacto: si nempe EA producatur ad C, ita ut AC sit $\infty\ \frac{dd}{b}$, ac deinde per punctum C ipsi DE parallela ducatur CG, occurrens productæ AB in G: erit enim in eodem illo concursus puncto vertex quæsitus.

Demonstratio.

Sumatur in prædicta curva punctum utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo AED, dato vel assumpto æquali, secante diametrum GB in B: erit, ex constructione, BE $\infty\ \frac{bx}{2a}$; ideoque, si ED vocetur y, erit DB $\infty\ y - \frac{bx}{2a}$ seu z; FG $\infty\ \frac{2ab}{e}$, GA $\infty\ \frac{dde}{2ab}$; AB $\infty\ \frac{ex}{2a}$, totaque GB $\infty\ \frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$. At cum ex proprietate Parabolæ DB quadratum sit æquale rectangulo FGB, erit, factâ multiplicatione ipsius z in seipsam, atque $\frac{2ab}{e}$ in $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$, $zz \infty\ dd + bx$. Unde substituto $y - \frac{bx}{2a}$ loco z, obtinebitur $yy - \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty\ bx + dd$, id est, $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$. Quod erat demonstrandum.

Quomodo autem pro casu hujus exempli converso Parabola describenda sit, ex comparatione ejusdem cum antedictis facile est colligere.

Si æquatio fuerit $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty\ xx + \frac{2byx}{a} - cx$,

 assum-

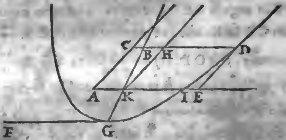
assumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} - \frac{1}{2}c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} + \frac{1}{2}c$. quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, ablatisque iis, quæ se invicem destruunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta

$$by + \frac{1}{2}cc \infty vv.$$

Unde apparet eandem esse reductam ad formulam prædicti Theorematis VIII conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Cujus specifica determinatio (suppositis, ut in adjuncta figura, AE indefinitè assumptam esse quantitatem incognitam x, atque cum altera y constituere angulum æqualem angulo EAC vel ejusdem ad binos rectos supplemento) quoniam ex jam ante explicatis quasi sponte profluit, idcirco eam adjunctâ figurâ breviter indicasse suffecerit.

Determinatio Loci.

AE indefinitè ∞x.
ED omnesque ipsi parallelæ ∞y.
AK $\infty \frac{1}{2}c \infty$ CH, quia KH parallela AC.



Ut a ad b, ita KH seu y ad HB: unde HB fit $\infty \frac{by}{a}$, & DB $\infty x - \frac{1}{2}c + \frac{by}{a} \infty v$.
Ut a ad e, ita KH seu y ad KB: unde KB (in qua diameter) fit $\infty \frac{ey}{a}$.
by divisum per $\frac{ey}{a}$, reddit $\frac{ab}{e}$: unde latus rectum FG fit $\infty \frac{ab}{e}$.
$\frac{1}{2}cc$, nempe terminus æquationis in totum cognitus, divisus per $\frac{ab}{e}$

$\frac{ab}{c}$, nempe per latus rectum, reddit $\frac{ccc}{2ab}$: unde KG fit $\infty \frac{ccc}{2ab}$, atque GB $\infty \frac{ccc}{2ab} + \frac{cy}{a}$.

Demonstratio.

Rectangulum FGB ∞ BD quadrato, ergo $\frac{1}{2}cc + by \infty vv$, vel $by \infty vv - \frac{1}{2}cc$, hoc est, $by \infty xx + \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} - cx - \frac{bcy}{a} + \frac{1}{4}cc$
$- \frac{1}{2}cc$.

Quocirca deletis delendis, factâque decenti transpositione, fiet $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty xx + \frac{2byx}{a} - cx$. Quod erat propositum.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis IX.

Sit æquatio $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Assumatur juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}c$, eritque $y \infty z - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Quo substituto in locum ipsius y, & ejus quadrato loco yy, fient æquationis termini, ut sequitur: $zz \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Facilitatis ergo pro $a - \frac{bc}{2a}$ scribatur d, supponendo a esse majorem quàm $\frac{bc}{2a}$, eritque æquatio $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$. Et apparet eandem reductam esse ad formulam Theorematis IX, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam, quam ex iis, quæ jam explicata sunt, determinare ac describere facillimum erit; ut ex sequenti figura iisque quæ super eâdem breviter annotata sunt, colligere licebit.

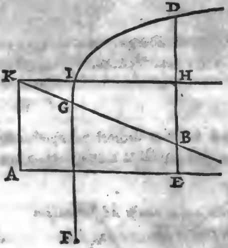
Determinatio Loci.

Sit initium immutabile ipsius x punctum A.
AE indefinitè ∞x.
ED omnesque ipsi parallelæ ∞y.
EAK vel AED, angulus quem x & y comprehendere debent.

AK $\infty \frac{1}{2}c$.

KH parallela ipsi AE.

Ut $2a$ ad b, ita KH seu x ad HB: unde HB erit $\infty \frac{bx}{2a}$.



Ut $2a$ ad e, ita KH seu x ad KB: unde KB (in quâ diameter) $\infty \frac{ex}{2a}$.

dx divisum per $\frac{ex}{2a}$, reddit $\frac{2ad}{e}$: unde latus rectum, quod sit FG, erit $\infty \frac{2ad}{e}$.

$\frac{3}{4}cc$ divisum per $\frac{2ad}{e}$, reddit $\frac{3cce}{8ad}$: unde KG fit $\infty \frac{3cce}{8ad}$, atque GB $\infty \frac{ex}{2a} - \frac{3cce}{8ad}$.

Hinc si GB diametro & latere recto FG per verticem G descripta sit Parabola, secans KH in I, erit ID Locus quæsitus.

Demonstratio.

Esto punctum D utcunque sumptum in ID, & DE ducta parallela ipsi AK, quæ si vocetur y; erit HD ∞ $y - \frac{1}{2}c$, ac DB ∞ $y - \frac{1}{2}c + \frac{bx}{2a}$, hoc est, z. Cujus quadratum cum æquetur rectangulo FGB, erit $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$, hoc est, $yy - cy + \frac{1}{4}cc + \frac{bxy}{a} - \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Ac proinde, si utrinque demantur æquales, terminique ritè transponantur, habebitur $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Quod erat propositum.

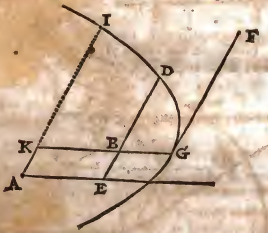
Atque hujus quidem exempli conversum, ut & cæteros casus huc spectantes, ex iis, quæ jam dicta sunt, simili modo reducere atque resolvere non difficile erit.

Exem-

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis X.

Si æquatio sit $ay - yy \infty bx$, sive, quod idem est, $yy - ay + bx \infty 0$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{1}{2}a$, erit $y \infty z + \frac{1}{2}a$. Quo substituto in locum ipsius y, & ejusdem quadrato loco yy, remanebit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$. Unde apparet, eandem esse reductam ad casum Theorematis X, ideoque per ea, quæ ibidem sunt demonstrata, Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, eademque x se indefinitè ab A versùs E extendere intelligatur; sit autem datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK,

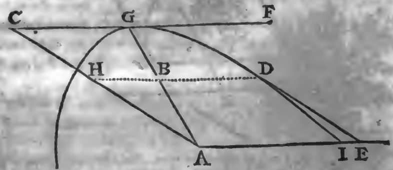


aut ipsius ad binos rectos complemento. Deinde, quoniam z assumpta est $\infty y - \frac{1}{2}a$, si y supra rectam AE exurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam recta KG ipsi AE parallela; ita ut AK omnesque ipsi æquidistantes inter AE & KG interceptæ sint $\infty \frac{1}{2}a$ Quo facto, si juxta Regulam fiat KG $\infty \frac{aa}{4b}$, eademque sumatur pro Parabolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi AK parallelæ, cujusque latus rectum FG sit ∞b: erit ipsius portio descripta GDI, quæ inter verticem G & productam AK intercipitur, Locus quæsitus.

 Etenim

Etenim assumpto in curva GDI puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, quæ secet diametrum KG in B, si eadem DE vocetur y: erit DB ∞ $y - \frac{1}{2}a$ seu z, ac GB sive GK — KB $\infty \frac{aa}{4b} - x$. Hinc, cum ex natura Paraboles quadratum ex BD fit æquale rectangulo FGB, erit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$, hoc est, $yy - ay + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa - bx$, sive $yy - ay + bx \infty 0$, sive etiam $ay - yy \infty bx$. Quod erat propositum.

Si æquatio fuerit $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$, sive, quod idem est, $xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty 0$: assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$. Quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, fiet, omnibus ritè ordinatis, $cc - dy \infty vv$. Unde apparet casum esse Theorematis X conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Quæ quidem ut specificè describatur, esto ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x se extendere ab A versùs E indeterminatè, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x



comprehendunt, æqualis angulo EAH aut ipsius ad duos rectos complemento. Deinde sumatur in AH recta AC $\infty \frac{cc}{d}$, ducaturque ex C recta CF ipsi AE parallela, atque in eadem sumptâ CG, quæ se habeat ad CA, ut cognita b ad a cognitam, hoc est, ut sit uti a ad b, ita AC ad CG, agatur AG, eaque pro diametro Parabolæ sumatur, quæ per verticem G versùs A erit describenda. Porrò cum in triangulo ACG ob rationem cognitam laterum

AC,

AC, CG, cognitum angulum C comprehendentium, utpote dato vel assumpto aut ejusdem ad duos rectos supplemento æqualem, cognita item sit ratio, quam habet AC ad AG, quæ sit ut a ad e; erit, AC existente $\infty \frac{cc}{d}$, AG $\infty \frac{cce}{ad}$. Per quam si terminus æquationis, in totum cognitus, nimirum cc, dividatur, orietur $\frac{ad}{e}$ pro latere recto. Ac proinde si fiat GF $\infty \frac{ad}{e}$, erit GF latus rectum quæsitæ Parabolæ, diametro GA correspondens; atque idcirco si ad dictam diametrum, dictumque latus rectum Parabola describatur, ut GDI, secans AE in I, dico IDG curvam esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductisque DE ipsi AH, ac DBH ipsi AE parallelis, si eadem DE exprimatur per y, erit quoque AH $\infty\, y$. Cumque sit ut AC ad CG, id est, ut a ad b, ita AH ad HB: erit HB $\infty \frac{by}{a}$, ideoque cum DH seu AE sit $\infty\, x$, erit DB $\infty\, x - \frac{by}{a}$ seu v. Similiter cum sit ut AC ad AG, hoc est, ut a ad e, ita AH seu y ad AB: erit AB $\infty \frac{ey}{a}$, & GA — AB seu GB $\infty \frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$. Hinc cum ex natura Paraboles rectangulum FGB sit æquale quadrato ex BD, erit, factâ multiplicatione ipsius FG seu $\frac{ad}{e}$ in GB seu $\frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$, & ipsius BD seu v in se ipsam, $cc - dy \infty vv$. Hoc est, restituto $x - \frac{by}{a}$ loco v, erit $cc - dy \infty xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa}$, vel $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Obiter autem & hic notandum, ut ex antedictis quoque facile est colligere, aliter etiam diametrum GA atque latus rectum GF indagari potuisse, hoc modo:

Cum AH indeterminatè sit $\infty\, y$, juxta primum Theorema hujus ita ducatur AG; ut recta HB, quemadmodum & quælibet alia ipsi AE parallela, quæ inter AH & AG intercipitur, sit $\infty \frac{by}{a}$; ponaturque ratio, quæ est inter AH & AB similesque, ut a ad e: ideoque cum AB indeterminatè sit $\infty \frac{ey}{a}$, terminus æquationis dy

per

per eandem divisus ostendet latus rectum sectionis FG $\infty \frac{ad}{e}$. Similiter terminus æquationis cc per prædictum latus rectum seu $\frac{ad}{e}$ divisus dabit quotientem $\frac{cce}{ad}$ pro quæsita AG.

Plura hic exempla subjungere supervacuum foret, cum mox omnes omnino casus possibiles generali regulâ annotare ac demonstrare animus sit.

Porrò quamvis Regulas capite primo explicatas particularibus ibidem exemplis seu casibus in hypothesi non illustraverimus, neque etiam id aut hic aut in sequentibus ullo modo necessarium ducamus, quippe cum unusquisque, qui Regulas ipsas rectè perceperit, easdem quibuslibet propositis exemplis seu casibus in hypothesi facilè applicare valeat; quandoquidem tamen libro primo insignes quasdam proprietates Parabolæ, Hyperbolæ, atque Ellipsis consultò prætermisimus, eâ mente, ut in hoc libro suis locis per modum Problematum non incongruè proponi ac demonstrari, simulque tanquam propositarum Regularum particularia exempla haberi possent, earundem explicationem hic & sub finem sequentis capitis subjiciemus.

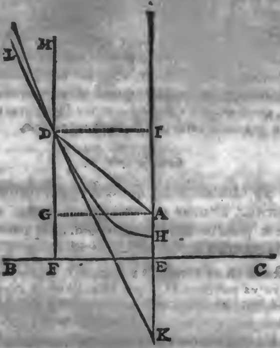
Problema I.

Propositio 11.

Datis puncto & lineâ rectâ, in plano per utrumque ducto aliud punctum invenire, à quo binæ rectæ, altera ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ, sibi invicem sint æquales: & quoniam infinita sunt ejusmodi puncta, quæ quæstioni satisfaciunt, Locum determinare ac describere, in quo cuncta & singula reperiantur.

Sit datum punctum A, & data positione recta linea BC, oporteatque in plano quod per utrumque ducitur, aliud punctum invenire,

nire, quemadmodum D; ita ut ductæ rectæ DA, DF, quarum hæc ad datam BC intelligitur perpendicularis, sibi invicem æquales sint.



Ductâ perpendiculari AE, quæ vocetur a, ac suppositis juxta Regulam binis lineis EF, FD incognitis atque indeterminatis datum angulum rectum EFD comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, quarum prior EF vocetur x, ac posterior FD nominetur y; si ducta præterea intelligatur AG ipsi EF æquidistans, erit in triangulo rectangulo AGD basis AD ∞ y, utpote ∞ ductæ DF; latus verò AG seu recta EF ∞ x, & GD, sive (si punctum G cadat inter D & F) FD—AE, aut (si punctum D inter F & G cadat) AE—FD ∞ $y - a$. Unde, cum quadratum basis æquale sit binis laterum quadratis simul sumptis, æquatio erit yy ∞ $xx + yy - 2ay + aa$, hoc est, ablatis iis quæ se invicem destruunt, omnibusque ritè ordinatis, erit $2ay - aa$ ∞ xx. Qui quidem casus est Theorematis noni hujus libri conversim, ac proinde Locus quæsitus erit linea Parabolica. Quare si juxta

Mm ea,

ea, quæ ibidem exposita sunt, ex E ducatur recta E I indefinitè extensa atque ipsi FD æquidistans; & ab eadem auferatur recta EH $\infty \frac{aa}{2a}$, id est, $\frac{1}{2}a$: erit describendæ Parabolæ diameter in dicta EI, (quæ quidem diameter axis quoque est, propter angulum EFD rectum) vertex autem in H, ac parameter ∞ 2a. Unde, per ea quæ libri primi capite primo exposita sunt, Parabolam ipsam describere facillimum erit. Cumque porrò axis punctum A, utpote quod ab H vertice distat quartâ ipsius parametri parte, id ipsum sit, quod vulgò Parabolæ Focus seu Umbilicus nuncupatur, apparet ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Quæ ab Umbilico ad quodlibet Parabolæ punctum recta ducitur, æqualis est axis portioni per applicatam ab eodem puncto abscissæ & quadrante parametri per verticem productæ.

Constat enim ex antedictis rectam AD, utcunque assumptum fuerit in curva punctum D, si per idem illud ad axem ordinatim applicata sit DI, æqualem esse perpendiculari DF, hoc est, rectæ IE, nempe axis portioni, per applicatam DI abscissæ, & per verticem H, longitudine HE $\infty \frac{1}{2}a$, id est, quadrante parametri, productæ.

Corollarium 2.

Manifestum quoque est ex antedictis, si positis quæ supra, & productâ FD, uti ad M, per assumptum punctum D contingens ducta sit, ut LDK, angulum FDK sive MDL angulo ADK æqualem esse.

[1] per 1 Cor. 2 primi hujus.
[2] per 5 primi.

Occurrat enim contingens LDK axi producto in K, eritque [1] recta IH ipsi HK, ideoque (æqualibus HE, AH utrinque additis) recta IE, hoc est, AD, ipsi AK æqualis; ac proinde [2] & angulus ADK angulo AKD, hoc est, angulo FDK sive MDL æqualis sit necesse est.

CA-

CAPUT III.

TErtio autem casu supra expresso, cùm nempe quantitatum incognitarum utraque ad quadratum ascendit, sive altera in alteram ducta in æquatione reperitur, neque æquatio ad terminos magis simplices reduci potest, ad aliquam sequentium formularum deventum erit;

I. $yx \infty ff.$

II. $\frac{lxy}{g} \infty xx - ff.$

III. $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}.$

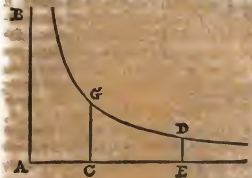
IV. $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx.$

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si æquatio sit $yx \infty ff$, Locus quæsitus est Hyperbola.

Sit enim, ut in præcedentibus, ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur; si que datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAB, aut ejusdem ad binos rectos supplemento. Deinde sumatur in AE recta AC ∞f, ducaturque CG eidem



æqualis ac ipsi AB parallela, descriptâque [1] per punctum G at-

 que

[1] per ea quæ in Coroll. ad 11 & 12. nec non cap. ult. lib primi hujus tradita sunt.

que Asymptotis AE, AB Hyperbolâ GD: dico curvam GD esse Locum quæsitum.

Sumatur enim in eadem curva punctum utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AB parallelâ, erit ex natura Hyperboles [1] rectangulum AED rectangulo ACG, hoc est, quadrato ex AG æquale. Hinc, cum AE sit assumpta pro incognita quantitate x, si ED vocetur y, erit $yx \propto ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

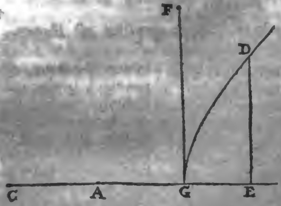
[1] per 3 primi hujus.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

Si æquatio sit $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff$, erit Locus quæsitus linea Hyperbolica.

Aut enim l ipsi g æqualis est aut inæqualis, & si æqualis sit, erit superior æquatio eadem ac si esset $yy \propto xx - ff$ (quod semel monuisse sufficiat). Ac facilè apparet, si ipsius x initium immutabile sit punctum A, atque eadem x se in linea AE ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AGF,



quòd si tam AG quàm AC fiant $\propto f$ cognitæ, ac GF sumatur $\propto$ GC, centroque A, & transversâ diametro CG ipsi GF lateri recto sive parametro æquali describatur [2] Hyperbola, ut GD, eandem curvam GD fore Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi FG parallelâ, erit [3] ex natura Hyperboles, cùm CG & GF supponantur æquales, quadratum ex DE æquale rectangulo CEG.

[2] per ea quæ cap. ult. primi hujus ostensa sunt.

[3] per 10 primi hujus.

CEG. Hinc, si DE vocetur y, cum ex hypothesi CE seu AE + AC sit $\infty\, x+f$, & GE sive AE — AG $\infty\, x-f$, erit $yy \infty xx-ff$.

At verò si l & g sint inæquales, apparet esse, ut l ad g, ita $xx-ff$ ad yy. Ac proinde si juxta ea, quæ supra exposita sunt, non jam parameter GF diametro transversæ CG æqualis, sed ut l ad g,



ita fiat transversa diameter CG ad GF parametrum, cæteraque omnia, ut supra, eodem modo quæsito erit satisfactum.

Est enim [1] ex natura Hyperboles, ut FG ad GC, ita ED quadratum ad CEG rectangulum, hoc est, ut g ad l, ita yy ad $xx-ff$, unde, revocando proportionem ad æqualitatem, erit $lyy \infty gxx-gff$. Ac proinde si utraque hujus æqualitatis pars dividatur per g, erit $\frac{lyy}{g} \infty xx-ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

[1] per 10 primi hujus.

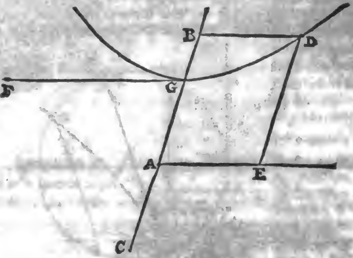
THEOREMA XIII.

Propositio 14.

Si æquatio sit $yy-ff \infty \frac{lxx}{g}$, erit Locus quæsitus Hyperbola.

Ad cujus determinationem specificam esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, ipsaque x se ab A versùs

E in linea AE indefinitè extendere intelligatur, sicque angulus quem y & x comprehendunt æqualis angulo EAG aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, cum sit ut l ad g, ita $yy - ff$



ad xx, statim apparet, si tam AG quàm AC sumantur æquales f cognitæ, fiatque ut l ad g, ita CG ad GF (quæ quidem GF sit ipsi AE parallela), ac postea centro A, transversâ diametro CG, & parametro GF Hyperbola describatur GD, eandem curvam GD fore Locum quæsitum.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AG, ac DB ipsi AE parallelâ, si eadem DE vocetur y, erit CB, hoc est, DE + AC, $\infty\, y + f$; & BG, sive DE — AG, $\infty\, y - f$, ideoque CBG rectangulum $\infty\, yy - ff$. Dein cum [a] ex natura Hyperbolæ sit ut CG ad GF, hoc est, ex hypothesi ut l ad g, ita rectangulum CBG ad DB sive AE quadratum, id est, ita $yy - ff$ ad xx: erit $gyy - gff \infty lxx$, hoc est, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$. Quod demonstrandum, determinandumque erat.

[a] per 10 primi hujus.

THEO-

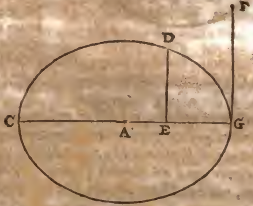
THEOREMA XIV.

Propositio 15.

Si æquatio ſit $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$, erit Locus quæſitus Ellipſis.

At verò cum Ellipſeos ſpecies, quæ latera rectum & tranſverſum æqualia habet, angulumque quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum rectum, ſit Circuli circumferentia: palam fit caſu propoſito Locum quæſitum etiam Circuli peripheriam eſſe poſſe.

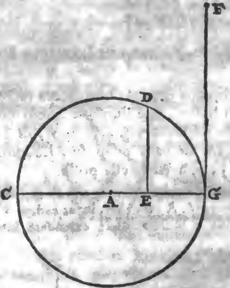
Hinc ad prædicti Loci determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, atque eadem x ſe per lineam AE ab A versùs E indeterminatè extendere intelligatur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AGF. Porrò cùm ſit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy: facilè apparet, ſi tam AG quàm AC ſumantur æquales f cognitæ; fiatque ut l ad g, ita CG ad GF, ac centro A, tranſversâ diametro CG, & parametro GF [a] Ellipſis deſcribatur GDC, eandem curvam GDC fore Locum quæſitum.



[a] per 7 Coroll 13 & 1 Cor. 14 primi hujus, ut & per ea quæ circa finem cap. 4 ejuſdem lib. tradita ſunt.

Sum-

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi FG parallelâ, erit [1] ex natura Ellipseos ut FG ad GC, ita ED quadratum ad CEG rectangulum. Hoc est, si ED vocetur y, cum CE sit $\infty f + x$, & EG $\infty f - x$, erit ut g ad l, ita yy ad $ff - xx$, unde $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod erat propositum.



[1] per 13 primi hujus.

Cæterùm liquidò constat, si CG & GF æquales fuerint, hoc est, si $l \infty g$, quòd etiam CEG rectangulum quadrato ED æquale sit futurum. Ideoque si angulus CGF sit rectus, curvam GDC fore Circuli circumferentiam.

Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione existunt, cùm Locus vel Hyperbola est, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia, ad aliquem quatuor casuum præcedentium, totidem Theorematibus jam explicatorum.

Si contingat, ut quantitatum incognitarum non modò una in alteram, aut non tantùm alterutra vel utraque in se ducta, sed & vel hæc, vel illa, vel utraque unius præterea dimensionis in æquatione reperiatur, constituens planum cum aliâ, sive cognitâ sive incognitâ,

tâ, sive etiam cum partim cognita & partim incognita quantitate: oportet loco incognitarum, aut illarum alterutrius, assumere alias vel aliam, quæ ipsas excedunt, vel ab iis deficiunt; idque integrâ quantitate, quæ cum illa incognita, in cujus locum nova non est assumpta, planum constituere reperitur, si nempe incognitarum neutra in se ipsam in æquatione ducta sit; sin secus, dimidio tantùm ejus quantitatis, quæ planum constituit cum incognita, in cujus locum assumptio facta est, casu utroque juxta differentem affectionem per signa + vel —, quæ præfiguntur iisdem illis quantitatibus, ita ordinatis, ut cum incognitis ab eadem æquationis parte reperiantur. Quo facto, & reiterato, ubi opùs, si ad formulas Parabolarum, capite secundo expositas perventum non fuerit, ad aliquem quatuor suprapositorum casuum reducta erit æquatio, ac proinde ipsi convenientem Locum determinare ac describere, per ea quæ superiùs explicata sunt, haud difficile erit.

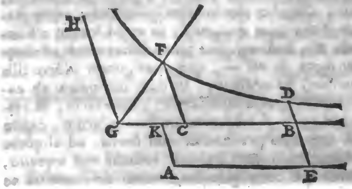
Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XI.

Si æquatio fuerit $yx - cx + by \infty ee$: assumpto $z \infty y - c$, & $v \infty x + b$, erit $z + c \infty y$, & $v - b \infty x$.

Unde si secundùm Regulam ubique in æquatione loco y substituatur $z + c$, erit $zx + cx - cx + bz + bc \infty ee$, sive $zx + bz + bc \infty ee$; ac rursus si loco ipsius x subrogetur $v - b$, erit $zv - bz + bz + bc \infty ee$, id est, $zv \infty ee - bc$. aut, (si loco termini $ee - bc$, qui in totum cognitus est, scribatur ff) $zv \infty ff$. Et apparet æquationem reductam esse ad formulam Theorematis XI, ac proinde Locum quæsitum esse Hyperbolam.

Ad cujus specificam determinationem ac descriptionem esto in apposita figura initium ipsius x immutabile punctum A, atque eadem x per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK

aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, quoniam z est $= y - c$, si y supra lineam AE exsurgere concipiatur, ducenda quoque est supra eandem recta KB ipsi AE parallela; ita ut pars rectæ AK, omniumque ipsi æquidistantium, inter AE & KB intercepta, veluti AK, æquetur c cognitæ. Porrò, quoniam v est $= x + h$, producenda est ipsa BK per K usque ad G, ita ut KG sit



$= h$. Quo facto, erit G centrum ipsius curvæ, & GB una Asymptoton, eritque altera ipsi AK parallela, ut GH. Unde si juxta Regulam prædicti Theorematis XI in recta GB sumatur GC æqualis f cognitæ, ducaturque CF eidem GC æqualis, ac parallela rectæ AK vel GH, atque per punctum F, Asymptotis GB & GH, sive Asymptoto GB atque ad axem GF, Hyperbola describatur FD: dico curvam FD fore Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, quæ secet rectam KB in B, si eadem DE vocetur y, erit DB sive DE—EB $= y - c$, id est, z. Est autem & GB sive AE + GK $= x + h$, hoc est, v. Quare cum ex natura Hyperboles rectangulum GBD æquetur GC quadrato, erit quoque $zv = ff$. aut restitutis $y - c$ loco ipsius z, & $x + h$ in locum ipsius v, atque $ee - ch$ loco ff, erit $yx - cx + hy - ch = ee - ch$, hoc est, $yx - cx + hy = ee$. Quod erat propositum.

Exem-

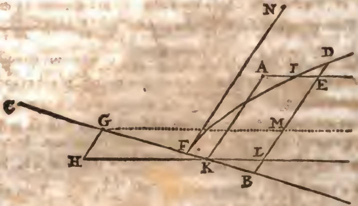
Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis XII & XIII.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$, assumpto $z \propto y + \frac{bx}{a} + c$, erit $y \propto z - \frac{bx}{a} - c$, eoque substituto in locum ipsius y, atque ejusdem quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bcx}{a} - cc \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Et factâ congruâ transpositione, $zz \propto \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$, hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $fa + bb$; ut quantitas xx absque fractione remaneat, fiet $\frac{aazz}{fa+bb} \propto xx + \frac{aaex + 2abcx}{fa+bb} + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$.

Deinde assumpto $v \propto x + \frac{aae + 2abc}{2fa + 2bb}$, ut terminus quoque æquationis, in quo x unius dimensionis reperitur, planè evanescat, habebitur $x \propto v \frac{-aae - 2abc}{2fa + 2bb}$. Quo substituto in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, ablatisque iis quæ se invicem tollunt, reducta erit æquatio ad formulam requisitam. At verò ut vitetur prolixior operatio loco $\frac{aae + 2abc}{fa + bb}$ scribatur $2b$, ita ut fiat æquatio $\frac{aazz}{fa+bb} \propto xx + 2bx + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$. Tum assumpto $v \propto x + b$ seu $x \propto v - b$, eoque substituto loco x in æquatione, ac ejusdem quadrato loco xx: erit $\frac{aazz}{fa+bb} \propto vv - bb + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$. Unde apparet, ante omnia hic esse considerandum, utrum bb sit majus quàm $\frac{aadd + aacc}{fa+bb}$, an contra: si enim majus sit, erit casus Theorematis XII; sin contra, erit casus Theorematis XIII. Ponatur itaque primò majus, ac proinde æquatio formulæ Theorematis XII. Et constat exinde Locum quæsitum Hyperbolam esse.

Ad cujus peculiarem determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea AE ab A versùs E indefinitè se extendere intelligatur; sitque angulus

quem x & y comprehendunt æqualis angulo EAK aut ipsius ad duos rectos supplemento. Porrò quoniam $z \propto y + c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, ut ED, ducenda primùm est infra eandem AE recta KL ipsi AE parallela; ita ut pars rectæ AK omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas AE & KL intercepta, veluti AK, EL, &c. æquetur c cognitæ. Deinde productâ LK usque ad H, ita ut KH sit $\propto b$, ideoque HL indefinitè sumpta $\propto x + b$, hoc est, v, ducatur per H punctum recta HG ipsi AK parallela, ita ut KH ad HG sit, ut a ad b. Quo facto, si per puncta G & K recta agatur linea GKB, habebunt omnium ipsi AK parallelarum partes, quæ inter KL & KB in-



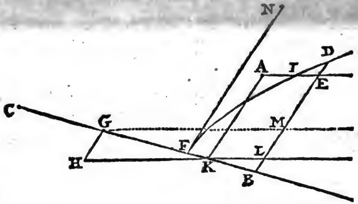
tercipiuntur (ut, exempli gratiâ, LB), ad partes ipsius KL, inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut, verbi gratiâ, LK) eandem rationem, quæ est inter b & a: hoc est, erit ut a ad b, ita KL ad LB, cum utraque sit ut KH ad HG. Ideoque cum KL sive AE indefinitè sumpta sit $\propto x$, erit LB, ut & quælibet ipsi parallela, inter KL & KB intercepta, $\propto \frac{bx}{a}$: ac proinde omnis linea supra AE rectam exsurgens, quæ possit esse y incognita, ad rectam KB producta, veluti DB sive DE + EL + LB erit $\propto y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z. Unde apparet, juxta Regulam lineam GB sumendam esse pro Hyperbolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi AK seu DB parallelæ: eritque ejusdem

dem Hyperbolæ centrum G punctum. At verò cum ex ante dictis triangulum KHG omnino sit cognitum, utpote lateribus KH & HG anguloque ad H sub iisdem comprehenso notis, erit quoque cognita ratio lateris KH ad KG, hoc est, ipsius GM (quæ per G ipsi KL æquidistans intelligitur) ad GB, quæ sit ut a ad i. Quare cum GM seu HL indefinitè sit v, GB quoque indefinitè concepta, hoc est, quælibet diametri portio, inter centrum & ordinatim applicatas intercepta, erit $\frac{iv}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituat, per multiplicationem aut divisionem, vel per utramque ita reducatur æquatio, ut in eadem quoque idem quadratum, nimirum $\frac{iivv}{aa}$ inveniatur. Quod quidem ut certâ methodo fiat, prædictum quadratum rectæ GB indefinitè conceptæ, hoc est, $\frac{iivv}{aa}$, dividatur per æquationis terminum, in quo vv sive simpliciter, sive aliâ fractione affectum invenitur, ac per inventum quotientem tota æquatio multiplicetur. ut in supra posito exemplo, si $\frac{iivv}{aa}$ dividatur per vv, fiet quotiens $\frac{ii}{aa}$. quare tota æquatio multiplicanda est per ii, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{iizz}{fa+bb} \propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iice}{fa+bb}$. Unde si juxta Regulam semi-latus transversum fiat GF vel GC $\propto \sqrt{\frac{iibb}{aa} \frac{-iida-iice}{fa+bb}}$, atque ratio transversi lateris CF ad rectum FN, ut ii ad $fa+bb$, & iisdem lateribus, diametroque ac centro jam inventis Hyperbole describatur FD, secans rectam AE vel KA productam in I: dico curvam ID esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, eâque productâ ut secet rectam KL in L, & diametro GB occurrat in B, si eadem DE vocetur y, erit ex ante dictis DB $\propto z$. Est autem, ut jam annotatum, GB $\propto \frac{iv}{a}$, atque ex hypothesi GF seu GC $\propto \sqrt{\frac{iibb}{aa} \frac{-iidd-iice}{fa+bb}}$, ideoque BC $\propto \frac{iv}{a} + \sqrt{\frac{iibb}{aa} \frac{-iidd-iice}{fa+bb}}$, ac BF $\propto \frac{iv}{a} -$

 $\sqrt{\frac{iibb}{aa}}$

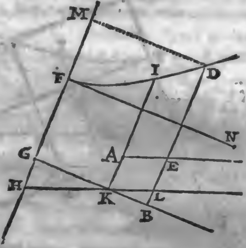
$\sqrt{\frac{iihh}{aa} - \frac{iidd - iicc}{fa + bb}}$, & rectangulum CBF $\infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{iidd + iicc}{fa + bb}$. Hinc cum ex natura Hyperboles NF ad FC, seu $fa + bb$ ad ii sit, ut DB quadratum, hoc est, zz, ad prædictum rectangulum CBF: erit $\frac{iizz}{fa + bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{iidd + iicc}{fa + bb}$.



Multiplicetur jam utrinque per aa, & dividatur per ii, eritque $\frac{aazz}{fa + bb} \infty vv - hh + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$. Dein restituto $x + h$ loco v, exurget $\frac{aazz}{fa + bb} \infty xx + 2hx + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$; itemque $\frac{eaa + 2bca}{fa + bb}$ loco $2h$, exurget $\frac{aazz}{fa + bb} \infty xx + \frac{eaax + 2bcax}{fa + bb} + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$. Porrò multiplicatis omnibus per $fa + bb$ iisque divisis per aa, habebitur $zz \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$. Ac denique restituto $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod erat propositum.

At verò ponatur secundò hh minus quàm $\frac{ddaa + ccaa}{fa + bb}$, & supra posita æquatio $\frac{iizz}{fa + bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{ddii + ccii}{fa + bb}$, quæ, multiplicatis omnibus ejusdem termini per $fa + bb$, ac producto diviso

diviſo per ii, factâque decenti tranſpoſitione, eadem cum ſequenti $zz - dd - cc + \frac{fabb + bbbb}{aa} \infty \frac{iivv}{aa}$ multip. per $fa + bb$ ac diviſ. per ii, id eſt, $\infty \frac{favv + bbvv}{aa}$. erit formulæ Theorematis XIII, unde Locus quæſitus iterum erit Hyperbola. Ad cujus ſpecificam determinationem & deſcriptionem, poſtquam ut in præcedenti figura ductæ ſunt lineæ AE, AK, KL, KH, HG, & GKB; erit quidem, ut ſupra, G centrum, at verò non erit diameter in linea GK, ſed, juxta Regulam, in linea HG producta

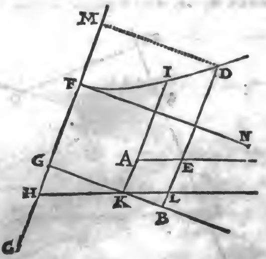


ad partes G, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi GKB parallelæ, eritque juxta eandem Regulam dimidium transverſæ diametri, nempe GF vel GC, æquale $\sqrt{dd + cc - \frac{fabb - bbbb}{aa}}$, ac ratio diametri ad parametrum ut $fa + bb$ ad ii. Quare ſi fiat, ut $fa + bb$ ad ii, ita CF ad FN, quæ quidem FN ipſi GKB æquidiſtans ſit, erit FN parameter: ac proinde ſi centro G transverſâ diametro CF & parametro FN Hyperbola deſcribatur FD, ſecans ipſam AE vel KA productam in I, erit ID curva Locus quæſitus.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DB ipſi AK (ſive GF), & DM ipſi GB parallelâ, ſi

ED

ED vocetur y, erit, ut supra, DB sive MG ∞ z, & BG sive DM ∞ $\frac{iv}{a}$. Cumque sit GF vel GC ∞ $\sqrt{dd+cc\frac{-fahh-bbhh}{aa}}$, erit CM ∞ $z+\sqrt{dd+cc\frac{-fahh-bbhh}{aa}}$, & MF ∞ $z-\sqrt{dd+cc\frac{-fahh-bbhh}{aa}}$, ac propterea rectangulum CMF ∞ $zz-dd-cc\frac{+fahh+bbhh}{aa}$. Est autem DM quadratum ∞ $\frac{iivv}{aa}$;



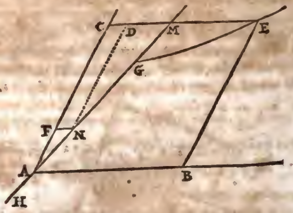
Quare cum ex natura Hyperboles sit ut FN ad FC, ita DM quadratum ad CMF rectangulum, hoc est, ut ii ad $fa+bb$, ita $\frac{iivv}{aa}$ ad $zz-dd-cc\frac{+fahh+bbhh}{aa}$; erit quoque $zz-dd-cc$ $\frac{+fahh+bbhh}{aa}$ ∞ $\frac{favv+bbvv}{aa}$. Et multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per $fa+bb$, factâque transpositione cogniti termini, erit $\frac{aazz}{fa+bb}$ ∞ $vv-bb\frac{+ddaa+ccaa}{fa+bb}$. Dein restitutis $x+h$ loco v, $\frac{eaa+2bca}{fa+bb}$ loco $2h$, atque $y+\frac{bx}{a}+c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy+\frac{2bxy}{a}+2cy$ ∞ $\frac{fxx}{a}+ex+dd$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

[illegible]

Si æquatio sit $xx + 2ay \propto \frac{2bvx}{a}$, aut $xx - \frac{2bvx}{a} + 2ay \propto 0$. Assumpto juxta Regulam $v \propto x - \frac{by}{a}$, erit $x \propto v + \frac{by}{a}$, eoque substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, sublatisque iis quæ se invicem destruunt, erit $vv - \frac{bbyy}{aa} + 2ay \propto 0$, & factâ congruâ transpositione, $vv \propto \frac{bbyy}{aa} - 2ay$; hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per bb, $\frac{aavv}{bb} \propto yy - \frac{2a^3y}{bb}$. Dein, assumpto $z \propto y - \frac{a^3}{bb}$, habebitur $y \propto z + \frac{a^3}{bb}$, eoque substituto in æquatione loco ipsius y, atque ipsius quadrato loco yy, erit $\frac{aavv}{bb} \propto zz - \frac{a^6}{b^4}$, sive $zz - \frac{a^6}{b^4} \propto \frac{aavv}{bb}$. Qui quidem casus est Theorematis 13tii, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola.

Ad cujus itaque peculiarem determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea AB ab A versùs B indefinitè sese extendere intelligatur, sitque angulus, quem x & y comprehendunt, æqualis angulo ABE. Deinde, quoniam ex antedictis facilè colligitur Hyperbolam hoc casu & similibus ita esse describendam, ut ordinatim ad ejus diametrum applicatæ sint ipsi AB æquidistantes, ductâ rectâ AC ipsi BE parallelâ, quoniam $v \propto x - \frac{by}{a}$, ducenda porrò est recta AM; ita ut omnium ipsi AB parallelarum partes, inter AC & AM interceptæ, veluti CM, ad partes ipsius AC inter A & dictas parallelas interceptas, veluti AC, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a; hoc est, ut sit quemadmodum a ad b, ita AC ad CM. Unde si AC seu BE indefinitè sumpta vocetur y, erit CM & similes $\propto \frac{by}{a}$, ac describendæ Hyperboles diameter in dicta AM. Porrò, quoniam $z \propto y - \frac{a^3}{bb}$, si ab AC auferatur AF $\propto \frac{a^3}{bb}$: erit FC indefinitè sumpta $\propto z$, & ductâ FN ipsi AB parallelâ, N centrum. Ac proinde, cum ratio ductæ ND ipsi FC æquidistantis & æqualis ad rectam DM aliarumque similium sit cognita, nempe ut a ad b, sitque itidem notus angulus

NDM, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto angulo ABE, erit quoque ratio ND ad NM aliarumque similium nota, quæ sit ut a cognitæ ad e itidem cognitam.



Hinc cum ND seu FC indefinitè sumpta exprimatur per z, erit NM itidem indefinitè sumpta $\infty \frac{ez}{a}$, cujus quidem quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituere debeat, multiplicanda est suprascripta æquatio per ee, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4} \infty \frac{eevv}{bb}$. Quo peracto, si juxta Regulam semi-latus transversum fiat NG vel NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut ee ad bb; iisdemque lateribus ac diametro & centro jam inventis Hyperbole describatur GE: dico curvam GE esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti E, ductâque EB in angulo ABE, dato vel assumpto æquali, nec non EC ipsi AB parallelâ, secante diametrum AM in M; si eadem EB, hoc est, AC, vocetur y, erit, ut supra, CM $\infty \frac{by}{a}$, ac proinde ME, sive AB $-$ CM, $\infty x - \frac{by}{a}$, hoc est, v. Est autem, ut superiùs annotatum, NM $\infty \frac{ez}{a}$, atque ex hypothesi NG seu NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ideoque HM $\infty \frac{ez}{a} + \frac{eaa}{bb}$, & MG $\infty \frac{ez}{a} - \frac{eaa}{bb}$, ac proinde rectangulum

gulum HMG $\infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$: hinc cum ex natura Hyperboles sit ut latus rectum ad transversum, sive ut bb ad ee, ita ME quadratum, id est, vv, ad prædictum rectangulum HMG: erit $\frac{eevv}{bb} \infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$, &c, multiplicatis omnibus terminis per aa, factoque per ee diviso, $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$. Dein restituto $y - \frac{a^3}{bb}$ in locum ipsius z, exurget $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$; adeoque, multiplicatis omnibus per bb, factoque diviso per aa, habebitur $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$. Denique restituto $x - \frac{by}{a}$ in locum ipsius y, expunctisque iis quæ se invicem destruunt, atque omnibus ritè ordinatis, fiet $xx + 2ay \infty \frac{2byx}{a}$. Quod fuit propositum.

PROBLEMA II.

Propositio 16.

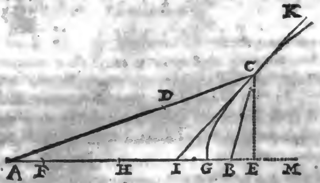
Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ dato differant intervallo, locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, ut puta C, ita nempe ut ductæ rectæ CA, CB differant dato intervallo FG seu AD.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilior sit operatio, assumatur rectus, ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, si opùs fuerit, intelligatur demissa perpendicularis, ut CE; tum, suppositis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis, assumptum angulum AEC comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x, ac posterior, nempe EC, nominetur y, ipsa autem AB, seu datorum punctorum cognita distantia, vocetur a, & data FG sive AD exprimatur per b. Hinc cum BE sive (si punctum B cadat inter A & E) AE — AB, aut (si punctum E inter A & B cadat) AB — AE sit

$\propto x - a$, & AC $\propto \sqrt{xx + yy}$, at BC $\propto \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$, sitque AC — AD $\propto$ BC: æquatio erit
$\sqrt{xx + yy} - b \propto \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$, factâque operatione convenienti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit
$4bbyy \propto 4aaxx - 4bbxx - 4a^3x + 4bbax + a^4 - 2bbaa + b^4$.
Unde factâ divisione per $4aa - 4bb$ habebitur $\frac{bbyy}{aa - bb} \propto xx - ax + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Deinde assumpto juxta Regulam $v \propto x - \frac{1}{2}a$, erit $x \propto v + \frac{1}{2}a$, ideoque substituto hoc valore in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, expunctisque iis quæ se invi-

Fig. 1.



cem destruunt, erit $\frac{bbyy}{aa - bb} \propto vv - \frac{1}{4}bb$. Qui quidem casus est Theorematis 12mi hujus libri, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E sumatur AH $\propto \frac{1}{2}a$, erit, juxta Regulam, H centrum, & semidiameter transversa (puta HG ab una, & HF ab altera parte,) $\propto \sqrt{\frac{1}{4}bb}$, id est, $\frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa FG (quæ quidem, ob applicatam CE ad diametrum HE perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit $\propto b$. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri, erit ut bb ad $aa - bb$. Unde per ea quæ libri primi capitibus secundo & ultimo exposita sunt Hyperbolam ipsam describere haud difficile erit. Porrò cum quadratum semidiame-

diametri transversæ sit $\infty \frac{1}{4} bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\infty \frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} bb$. Atque cum FB sive BH + HF sit $\infty \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$, & BG sive BH — HG $\infty \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$, erit quoque rectangulum FBG $\infty \frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} bb$, nempe ∞ quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ: ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgò oppositarum Hyperbolarum Foci sive Umbilici nuncupantur. Unde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Si ab assumpto utcunque in Hyperbola puncto ad utrumque Umbilicum rectæ ducantur, earum major minorem longitudine transversi axis superabit.

Etiamsi veritas præcedentis Corollarii ex antedictis omnino constet, cum tamen illud à Veteribus, Recentioribusve, quod sciam, non nisi per multas ambages longâque difficilium Theorematum concatenatione hactenus demonstratum sit: id ipsum hic demonstratione unicâ, & quidem breviore satisque simplici, aliter ostendisse non inutile fortè judicabitur.

Esto igitur Hyperbola quælibet GC, cujus centrum H, transversus axis FG, atque Umbilici A & B, adeoque rectangulum FBG ut & GAF semi-secundæ diametri quadrato æquale. Ductis autem ab assumpto quolibet curvæ puncto C ad puncta A & B rectis CA, CB, ordinatim ad axem applicetur CE, fiatque ut HF ad HA, ita HE ad HM, ideoque [1] AHE rectangulo æquale rectangulum FHM. Unde cum sit [2], ut

HFq ad GAF, ita FEG ad CEq; erit quoque, per compos. rationis contrariam, ut

HFq ad (HFq + GAF, id est [3], ad) HAq; ita FEG ad FEG + CEq; adeoque [4] ut

HFq ad HAq, ita (HFq + FEG, sive [5]) HEq ad HAq + FEG + CEq. Est autem quoque [6], ut

HFq ad HAq, ita HEq ad HMq. Quocirca [7]

HMq ∞ HAq + FEG + CEq; hoc est, addito utrinque HFq seu HGq, erit

[1] per 16 sexti.
[2] ex hypothesi & per 10 primi hujus.
[3] per 6 secundi.
[4] cum sit ut una antecedentium ad unam conseq., ita omnes antecedentes ad omnes conseq. per 12 quinti.
[5] per 6 secundi.
[6] ex constructione & per 22 sexti.
[7] per 9 & 11 quinti.

$$HMq + \left\{\begin{array}{l} HFq \\ \text{seu} \\ HGq \end{array}\right. \infty \left\{\begin{array}{l} HAq \\ \text{seu} + (HFq \pm FEG, \text{i.e.}^{1}) HEq, + CEq. \\ HBq \end{array}\right.$$

[1] per 6 secundi.

Hinc additis vel sublatis ab utraque æquationis parte æqualibus,

$$\text{nimirum} \left\{\begin{array}{l} FHM \\ \text{seu} \\ GHM \end{array}\right. \text{bis ab una, \&} \left\{\begin{array}{l} AHE \\ \text{seu} \\ BHE \end{array}\right. \text{bis ab altera parte: erit}^{2}$$

$FMq \infty (AEq + CEq$, id est [3]) ACq; itemque [4] $GMq \infty (BEq + CEq$, id est [5]) BCq. Cumque propterea FM sit ∞ AC; & $GM \infty BC$; sitque ipsarum FM & GM differentia FG, manifestum est ipsarum quoque AC & BC majorem superare minorem, ejusdem FG, nempe axis transversi, longitudine. Quod demonstrandum erat.

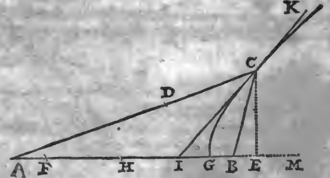
[2] per 4 secundi.
[3] per 47 primi.
[4] per 7 secundi.
[5] per 47 primi.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Hyperbolæ puncto ad utrumque Umbilicum rectis, quæ angulum iis comprehensum bifariam dividit linea curvam in eodem puncto contingit; & conversim.

Si enim quæ angulum ACB bifariam dividit recta ICK non contingat Hyperbolam in C puncto, secet eandem, si fieri potest,

Fig. 1.

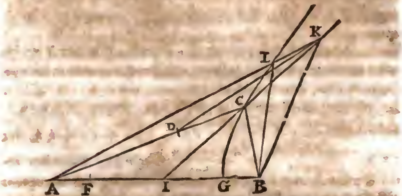


atque ita saltem aliquo sui puncto, veluti K, intra Hyperbolam sit.

Tum

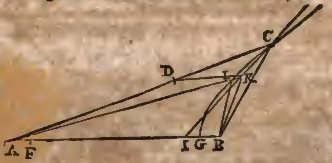
Tum ductis K B, K D, & K A (quarum posterior Hyperbolam secet in L, à quo ad B ducta sit B L), cum in triangulis D C K, B C K latera D C, C K lateribus B C, C K utrumque utrique,

Fig. II.



circa [1] æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis D K basi B K æqualis. Cumque porrò, juxta Corollarium præcedens, A L ipsam L B, ideoque & A K rectas B L, L K, simul sumptas, superet intervallo A D; sitque B K, ideoque & K D, ipsis B L, L K simul sumptis minor: per consequens A K eandem K D majori longitudine quàm est A D excedet, id est, ipsa A K binis re-

Fig. III.



ctis K D, D A simul sumptis major erit. Quod cum absurdissimum sit [2], non secat Hyperbolam recta I C K, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia recta

[1] Cum enim ex hypothesi angul. A C I & B C æquales ponantur, erunt quoque anguli A C K & B C K, qui ipsis sunt deinceps, per 13 primi æquales.

[2] per 20 primi.

recta Hyperbolam contingere quàm ICK [*], manifestum est conversim, eam, quæ Hyperbolam in C contingit, angulum quoque ABC bifariam dividere.

[*] per 3. Cor. 6 primi hujus.

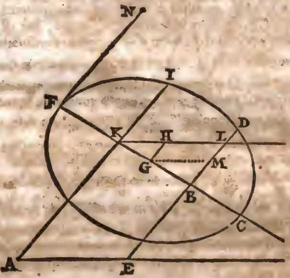
Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XIV.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty - xx + dx + kk$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - c + \frac{bx}{a}$, hoc est, $y \infty z + c - \frac{bx}{a}$, eoque substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} + \frac{2bcx}{a} - cc \infty - xx + dx + kk$; id est, factâ decenti transpositione, erit $zz \infty - xx + \frac{bbxx}{aa} + dx - \frac{2bcx}{a} + cc + kk$, sive $zz \infty \frac{-aaxx + bbxx}{aa} + \frac{dax - 2bcx}{a} + cc + kk$. Supposito autem a majore quàm b, ac multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $aa - bb$, ut quantitas xx absque fractione inveniatur, erit $\frac{aazz}{aa-bb} \infty - xx \frac{+daax - 2bacx}{aa-bb} + \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$. Jam verò si facilioris operationis gratiâ loco $\frac{daa - 2bac}{aa-bb}$ substituatur $2b$: erit æquatio $\frac{aazz}{aa-bb} \infty - xx + 2bx + \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$, aut $\frac{aazz}{aa-bb} + xx - 2bx \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$.

Hinc si juxta Regulam assumatur $v \infty x - b$, sive $x \infty v + b$, atque hoc in locum ipsius x, ejusque quadratum loco xx substituatur, ac expungantur quæ se invicem destruunt, habebitur $\frac{aazz}{aa-bb} + vv - bb \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$. Hoc est, factâ decenti transpositione, erit $\frac{aazz}{aa-bb} \infty - vv + bb + \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$. Atque ita apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis XIV, ideoque Locum quæsitum aut Ellipsin aut Circuli circumferentiam existere. Rursus verò facilioris operationis ergo loco $\frac{aa}{aa-bb}$ scribatur $\frac{l}{g}$, & loco $bb + \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$ scribatur ff, ita ut æquatio sit talis $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$.

Ad

Ad peculiarem autem prædicti Loci determinationem ac descriptionem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem x se in linea AE ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK vel ejusdem ad duos rectos complemento. Hinc quoniam $x \propto y - c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam recta KL eidem parallela, ita ut pars rectæ AK omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas AE & KL intercepta, veluti AK,



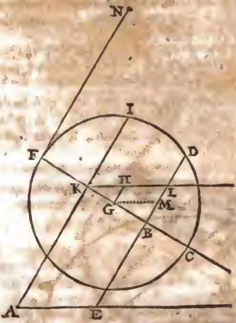
EL, &c. æquetur c cognitæ: ac deinde per punctum K infra rectam KL ducenda est recta KB in tali angulo, ut rectarum omnium ipsi AK parallelarum partes, quæ inter KL & KB intercipiuntur (veluti LB) ad partes ipsius KL, inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut verbi gratiâ LK) eandem habeant rationem, quæ est inter b & a, hoc est, ut sit uti a ad b, ita KL ad LB. Atque ita positâ KL sive AE, indefinitè sumptâ, $\propto x$, LB omnesque ipsi parallelæ inter KL & KB interceptæ erunt $\frac{bx}{a}$. Unde ex prædictis constat diametrum fore in recta KB,

ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi AK æquidistantes. Jam verò cum v sit $\infty\ x - b$, à recta KL sive AE auferenda est KH, ita ut eadem KH sit $\infty\ b$, ideoque HL indefinitè quoque sumpta $\infty\ x - b$ seu v. Deinde per punctum H ducenda est HG ipsi AK parallela, secans inventam diametrum in G, eritque idem intersectionis punctum G quæsitæ Ellipseos centrum. Porrò quoniam similium triangulorum KHG & KLB nota est ratio lateris KH ad HG sive KL ad LB, ut & angulus sub iisdem lateribus contentus, utpote æqualis angulo dato vel assumpto EAK, erit quoque nota ratio lateris KH ad latus KG sive KL ad KB, quæ ponatur ut a cognitæ ad e itidem cognitam. Ideoque cum HL sive GM, quæ ipsi HL parallela intelligitur, indeterminatè sumpta sit $\infty\ v$, erit GB, similiter indeterminatè sumpta, hoc est, quælibet diametri portio inter centrum & quamlibet ordinatim applicatam intercepta, $\infty\ \frac{ev}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum in formula Theorematis XIV ultimum æquationis terminum constituat, æquatio supra exposito modo ita reducatur, ut terminus ejus extremus fiat $\frac{eevv}{aa}$, id quod factum erit, si singuli æquationis termini multiplicentur per ee, productumque dividatur per aa. inde enim sequenti modo se habebit æquatio $\frac{leezz}{gaa} \infty \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc si juxta Regulam semi-latus transversum GF vel GC fiat $\infty \sqrt{\frac{eeff}{aa}}$, id est, $\frac{ef}{a}$, & ratio transversi lateris CF ad rectum latus FN, ut lee ad gaa, iisdemque lateribus, ac diametro, centroque, modò inventis, Ellipsis describatur FDC, secans rectam AE vel AK productam in I: erit curva IDC Locus quæsitus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, ac si opùs sit productâ ut secet rectas KL & KB in L & B, si eadem DE vocetur y, erit DB, hoc est, DE $-$ EL $+$ LB $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$ seu z. Est autem ut jam annotatum est GB $\infty\ \frac{ev}{a}$, atque ex constructione GF vel GC $\infty\ \frac{ef}{a}$, ideoque FB $\infty\ \frac{ef}{a} + \frac{ev}{a}$, & BC $\infty\ \frac{ef}{a} - \frac{ev}{a}$, ac rectangulum FBC $\infty\ \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc cum ex natura Ellipsis sit ut NF ad FC, hoc est,

ut

ut gaa ad lee, ita DB quadratum, hoc est, zz ad prædictum rectangulum FBC; erit $\frac{leezz}{gaa} \infty \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$, id est, multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per ee, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$, ideoque restituto $x - h$ loco v, atque $bb + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ loco ff, ut & $\frac{aa}{aa - bb}$ loco $\frac{l}{g}$, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty hb + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb} - xx + 2hx - hh$, hoc est, $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Porrò restituto $\frac{daa - 2bca}{aa - bb}$ loco $2h$; fiet $\frac{aazz}{aa - bb} + xx \frac{- daax + 2bcax}{aa - bb} \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, id est, factâ multiplicatione per $aa - bb$ ac divisione per aa, erit $zz + xx - \frac{bbxx}{aa} - dx + \frac{2bcx}{a} \infty cc + kk$. Ac denique loco z factâ restitutione ipsius $y - c + \frac{bx}{a}$, deletisque iis quæ se invicem tollunt, ac omnibus ritè ordinatis, obtinebitur $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty - xx + dx + kk$. Quod determinandum ac demonstrandum erat.



Notandum porrò hic est, quòd si angulus AKB foret rectus, ac proinde ordinatim applicatæ, ut DB, KI, &c. ad diametrum KB perpendiculares, ac simul FN æqualis FC, prædictam curvam fore Circulum, quemadmodum ex elementis perspicuum est.

PROBLEMA III.

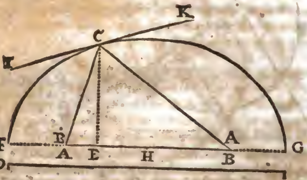
Propositio 17.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ simul sumptæ datæ longitudini æquales sint; locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utpura C; ita nempe, ut ductæ rectæ C A, C B simul sumptæ æquales sint datæ rectæ lineæ D.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilior sit operatio, assumatur rectus; ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, si opùs fuerit,

Fig. 1.



intelligatur demissa perpendicularis, ut CE. Tum suppositis, juxta Regulam, A E & E C incognitis atque indeterminatis assumptum angulum rectum A E C comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum A E, vocetur x, ac posterior, nempe E C, nominetur y; ipsa autem A B seu datorum punctorum distantia cognita appelletur a, & data D exprimatur per b. Hinc cum B E sive (si punctum E cadat inter A & B) A B — A E, aut (si punctum B inter A & E cadat) A E — A B sit $\infty\ a == x$; atque A C $\infty\ \sqrt{xx + yy}$; & C B $\infty\ \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$; sitque D — A C ∞ C B: æquatio erit $b - \sqrt{xx + yy}\ \infty\ \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$; factâque operatio-

ne decenti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit

$4bbxx - 4aaxx - 4bbax + 4a^3x \infty b^4 - 2bbaa + a^4 - 4bbyy$, hoc est, factâ divisione per $4bb - 4aa$, erit

$xx - ax \infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{bbyy}{bb-aa}$. Assumpto deinde juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, eâque substitutâ in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, expunctisque iis quæ se invicem destruunt: erit $vv \infty \frac{1}{4}bb - \frac{bbyy}{bb-aa}$, sive $\frac{bbyy}{bb-aa} \infty \frac{1}{4}bb - vv$. Qui quidem casus est Theorematis 14[ti], ac proinde Locus quæsitus Ellipsis. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E sumatur AH $\infty \frac{1}{2}a$: erit, juxta Regulam, H centrum, & semi-diameter transversa (velut HF ab una, & HG ab altera parte) $\infty \frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversâ FG (quæ quidem, ob applicatam CE ad eandem perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit ∞b. Ratiò autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri erit, ut bb ad $bb - aa$. Unde per ea, quæ Capitibus tertio & ultimo libri primi exposita sunt, quæsita Ellipsis facillimè describetur. Porrò cum quadratum semi-diametri transversæ sit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$. Atqui cum FB seu GA sit $\infty \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, & BG seu AF $\infty \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, erit quoque rectangulum FBG seu GAF $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$, nempe æquale quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ. Ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgò Ellipseos Foci sive Umbilici nuncupantur. Unde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

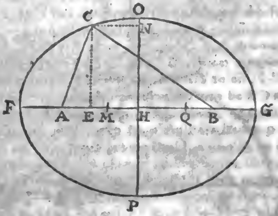
Corollarium 1.

Quæ à quolibet in Ellipsi puncto ad utrumque Umbilicum rectæ ducuntur, simul sumptæ transverso axi æquales sunt.

Quemadmodum autem in Hyperbola superiùs demonstratum est, ductarum CA, CB differentiam transverso axi FG æquari, ita & hîc earum aggregatum eidem transverso axi æquale esse ostendetur, nempe, si non per additionem & compositionem,

ut ibidem factum est, sed per subductionem & divisionem argumentatio instituatur. Quod ipsum tamen, adhibitâ nonnullâ mutatione, elegantiùs quoque in hunc modum absolvi posse videtur.

Esto qualibet Ellipsis FCG, cujus centrum H, axis major FG, minor OP, atque Umbilici A & B; adeoque rectangulum FBG ut & GAF æquale quadrato semi-secundæ diametri HO.



Ductis ab assumpto quolibet curvæ puncto C rectis CA, CB, ordinatim ad utrumque axem applicentur CE, CN; & fiat ut HF ad HA, ita HE ad HM, adeò ut [1] AHE rectangulo æquale sit rectangulum FHM; sumaturque HQ æqualis ipsi HE. Hinc cùm sit [2] ut HFq ad HAq, ita HEq ad HMq, erit quoque per conversionem rationis ut HFq ad GAF seu [3] HOq, id est [4], ut CNq sive HEq ad ONP, ita idem HEq ad EMQ; ac proinde [5] æqualia sunt rectangula ONP & EMQ. Quocirca cum [6] HMq unà cum EMQ, id est, cum ONP rectangulo, æquale sit HEq; sicque & HFq [7] æquale quadratis rectarum HA & (HO [8] seu [9]) CE unà cum rectangulo ONP: erunt HMq + ONP + HFq æqualia HEq + HAq + CEq + ONP. Ac proinde si utrinque auferatur ONP rectangulum, remanebunt bina quadrata rectarum HM & HF seu HG simul æqualia tribus quadratis rectarum HE, HA seu HB, & CE. Hinc

[1] per 16 sexti.
[2] per 22 sexti.
[3] ex hypothesi.
[4] per 13 primi hujus ejusque corol. 1.
[5] per 9 quinti.
[6] per 5 secundi.
[7] per 5 secundi.
[8] quippe quadr. ex HO æquale est GAF rectang. ex hypoth.
[9] per 5 secundi.

Hinc additis ablatisvé ab utraque æquationis parte æqualibus, nimirum FHM seu GHM bis ab una, & AHE seu BHE bis ab altera parte: erit [1] FMq æquale (AEq+CEq, id est [2],) ACq: itemque [3] GMq æquale (BEq+CEq, id est [4],) BCq. Cumque propterea recta FM æquetur ipsi AC, & GM ipsi BC: erit ipsarum AC & BC aggregatum transverso axi FG æquale. Quod demonstrandum erat.

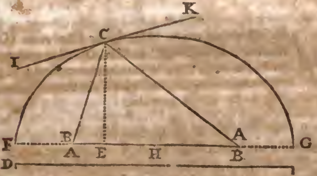
[1] per 7 secundi.
[2] per 47 primi.
[3] per 4 secundi.
[4] per 47 primi.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Ellipseos puncto ad utrumque Umbilicum rectis, si per idem illud punctum altera recta agatur, æquales cum utraque ducta angulos constituens, eadem curvam in dicto puncto continget; & contra.

Si enim recta ICK ita ducta, ut æquales sint anguli ACI, BCK, non contingat Ellipsin in C puncto, secet eandem, si fieri potest, in C & K. Deinde productâ AC ad L, ita ut tota AL

Fig. 1.



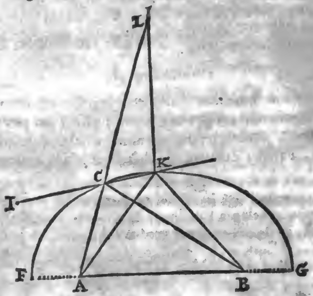
axi FG, idecque [5] adjecta CL ipsi CB æqualis sit, jungantur AK, BK, LK. Cum igitur, in triangulis LCK, BCK latera LC, CK lateribus BC, CK, utrumque utrique, circa æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis LK basi BK æqualis. At verò cum punctum K in Ellipsi supponatur, erunt,

[5] per Corol. 1 hujus.

per

per Corollarium præcedens, rectæ AK, KB, hoc est, latera AK, KL simul sumpta transverso axi FG, ideoque & basi AL

Fig. 11.



[1] per 20 primi.
[2] per 17 primi hujus.

æqualia, quod est absurdum [1]. Non igitur secat recta ICK Ellipsin, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia recta Ellipsin contingere quàm ICK [2], manifestum est, è contra quoque eam, quæ Ellipsin in C contingit, efficere angulos ACI, BCK æquales.

CAPUT IV.

Regula universalis inveniendi ac determinandi loca quælibet plana & solida.

Jam verò his omnibus ita præmissis, pro generali Regula concludi potest, æquationes omnes, quæ in indagatione Locorum prædicto modo obvenire atque obtingere possunt, ita ut in iis neutra quantitatum incognitarum in se ducta, neque factum sub iisdem ad solidum

lidum excurrat, sed aut quadratum, aut planum non excedat, ex aliqua sequentium formularum constare, vel ad earundem aliquam Methodo jam explicatâ reduci posse: nimirum,

1$^{\text{mò.}}$
$$\begin{cases} y \infty \frac{bx}{a}, \text{ sive, quod idem est, } y \infty x\text{: cum supponi possit esse } a \infty b. \\ y \infty \frac{bx}{a}\ 8\ c, \text{ vel } y \infty c - \frac{bx}{a}. \end{cases}$$

Signum 8 significat + vel −.

Sed hic notandum, fieri etiam posse, ut per operationem quantitatum incognitarum altera evanescat, alteraque sola notæ alicui quantitati æqualis remaneat, sicut superiùs expositum est.

2$^{\text{dò.}}$
$$\begin{cases} yy \infty dx, \text{ aut conversim } dy \infty xx. \\ yy \infty dx.ff, \text{ aut conversim } dy.ff \infty xx. \\ zz \infty dx, \text{ aut conversim } dy \infty vv. \\ zz \infty dx.ff, \text{ aut conversim } dy.ff \infty vv. \end{cases}$$

3$^{\text{tiò.}}$
$$\begin{cases} yy \infty \frac{lxx}{g}.ff. \\ zz \infty \frac{lxx}{g}.ff. \\ yy \infty \frac{lvv}{g}.ff. \\ zz \infty \frac{lvv}{g}.ff. \end{cases}$$

sive etiam

$$yx \infty ff. \quad zx \infty ff. \quad yv \infty ff. \quad zv \infty ff.$$

Supponendo ubique y & x esse quantitates indeterminatas ac primò conceptas; at verò z esse quantitatem assumptam, & quæ composita sit ex y 8 aliâ quâdam quantitate, vel in totum cognitâ, vel cui etiam altera incognita primùm concepta, nimirum x, permixta sit; atque v quidem assumptam quoque esse, sed eo casu constare solummodo ex x 8 aliâ quantitate cognitâ, absque ulla ipsius y incognitæ quantitatis permixtione; aut contra v esse ∞ x 8 aliâ quâdam quan-

 titate

titate, cui & y incognita permixta esse possit atque eo quidem casu z ex y 8 aliâ quantitate in totum cognitâ constare.

Et si æquatio similis sit alicui formularum sub N° 1, comprehensarum, erit Locus quæsitus Linea Recta; sub N° 2. Parabola; & sub N° 3. secundùm signorum angulorumque varietatem vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circulus.

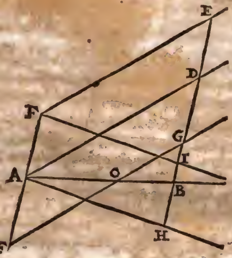
Ut autem prædicta Loca specificè determinentur sive prædictæ Lineæ in plano Geometricè describantur, sciendum est, aliquod debere præsupponi punctum, ut & aliquam lineam à quo exordium sumat, & per quam indefinitè se extendere intelligatur altera incognitarum quantitatum primò conceptarum; itemque angulum quendam esse præsupponendum, quem dictæ quantitates incognitæ constituant in puncto, in quo sibi invicem junctæ intelliguntur.

Sit itaque in apposita figura, ut & in sequentibus omnibus, prædictum punctum A, dictaque linea A B, à quo, & per quam quantitas x se indefinitè extendere concipiatur; atque angulus ABE, quem faciunt quantitates y & x, in puncto B sibi invicem junctæ.

Et primo quidem casu, cùm Locus quæsitus est Linea recta, nimirum, æquatione existente $y \infty x$ vel $y \infty \frac{bx}{a}$, ipsum A punctum erit initium dictæ lineæ, atque ut eadem specificè describatur sumendum est in linea AB punctum utcunque, exempli gratiâ, B, ac per illud ductâ rectâ, velut HBE, ita ut angulus ABE præsupposito vel concepto angulo sit æqualis, si in eadem recta sumatur punctum, veluti D; ita ut AB & BD sint æquales, vel ut AB sit ad BD, sicut a ad b, atque ex A per punctum D ducatur recta AD: erit eadem AD indefinitè extensa Locus quæsitus. At si in æquatione inveniatur quoque terminus c, ac ipse quidem signo + affectus sit, ducenda est è puncto A ad eandem partem lineæ AB quàm est punctum E, aut si signo — adficiatur ab altera parte, recta AF ipsi HBE parallela atque æqualis c cognitæ; ductâque FE vel FG, quæ rectam AB secet in O, ipsi AD parallelâ: erit FE vel OG indefinitè producta Locus quæsitus.

Sed

Sed si æquatio sit $y \infty c - \frac{bx}{a}$, in dicta linea HBE sumendum est ab altera parte lineæ AB, quâ datus vel assumptus angulus ABE existit, punctum H, ita ut AB ad BH sit, sicut a ad b; ductâque AH, ex prædicto puncto F ab opposita parte lineæ AB, quâ sum-

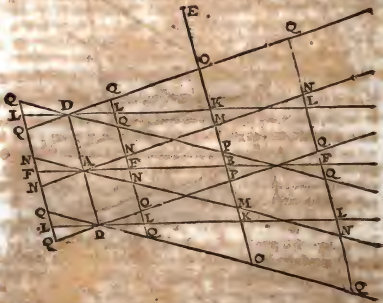


ptum est punctum H, ducenda est FI ipsi AH parallela: eritque eadem FI producta donec cum linea AB coincidat Locus quæsitus.

Etenim, cum tam AB quàm BD sit ∞x, aut AB ad BD ab una, ut & AB ad BH ab altera parte, sit ut a ad b; ac proinde BD vel BH $\infty \frac{bx}{a}$: itemque, cum AF seu DE vel DG ut & HI sint æquales c cognitæ: erit BE sive BD+DE $\infty \frac{bx}{a} + c$, & BG sive BD—DG $\infty \frac{bx}{a} - c$, ac BI sive HI—HB $\infty c - \frac{bx}{a}$. Unde cum punctum B sumptum sit utcunque, eadem erit de omnibus aliis, in linea AB, prædictisvé locis, assumptis punctis demonstratio: atque ita patet prædictas lineas AD, FE, FG, & FI esse Loca quæsita. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

At verò si juxta formulas sub N°. 2 exhibitas Locus quæsitus sit linea Parabolica, erit

I. Primo casu, quando æquatio est $yy \infty dx$, ipsa AB Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABE æquales, atque ejusdem vertex A punctum.



II. Secundo casu positâ æquatione $yy \infty dx . ff$, manente diametro in eadem linea AB, sumptâque, ut in sequenti figura, AF $\infty \frac{ff}{d}$, erit ejusdem vertex in puncto F. Quod quidem punctum F, si uterque terminus tam dx quàm ff signo + sit affectus, ab altera parte puncti A, quâ est punctum B, sumendum est; sed si vel terminus dx, vel terminus ff signo — affectus sit, ab eadem parte puncti A, quâ est punctum B, sumi debet: & quidem si terminus dx signo + affectus sit, ab A versùs B Parabola describenda est; sin contra terminus dx signo — affectus fuerit, in contrariam partem, ab F nempe versùs A, describi debet.

At

At si æquatio sit $zz \infty dx$, vel $zz \infty dx.ff$, cum z non sit quantitas primò concepta sed assumpta, vel assumpta erit pro $y \,8\, c$, vel pro $y \,8\, \frac{bx}{a}$, vel denique pro $y \,8\, \frac{bx}{a} \,8\, c$.

III. Et si quidem z assumpta sit pro $y \,8\, c$, qui sit casus tertius, ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela atque ∞c; ita ut, si z assumpta sit pro $y - c$, punctum D cadat ad eandem partem lineæ AB, quam conceptus est angulus ABE: Et, si z sit assumpta pro $y + c$, punctum D è contra ad alteram partem lineæ AB cadat. Deinde ductâ DK ipsi AB parallelâ, erit in eadem DK Parabolæ diameter, & D vertex, si æquatio sit $zz \infty dx$.

IV. Sed si sit $zz \infty dx.ff$, qui sit quartus casus, sumptâ DL $\infty \frac{ff}{d}$, erit vertex punctum L; quod quidem pro terminorum dx & ff per + vel — affectione eodem modo, ut supra de puncto F dictum est, vel citra vel ultra D punctum cadet; uti & vel in hanc vel in illam partem, prout terminus dx signo + vel — adfectus fuerit, ipsa Parabola, ut supra notatum est, describi debet: eritque omnibus & singulis prædictis quatuor casibus Parameter ∞d.

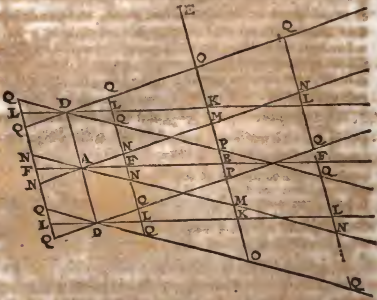
V. Si verò z assumpta sit pro $y \,8\, \frac{bx}{a}$, qui casus sit quintus, sumpto in linea BE puncto M, ita ut sit AB ad BM, sicut a ad b, (quod quidem punctum M sumendum est ab eadem parte lineæ AB, quâ conceptus est angulus ABE, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, sed ab altera parte, si habeatur $+\frac{bx}{a}$) ducenda est per puncta A & M recta AM: eritque AM eo casu Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo AME æquales, & si in æquatione terminus ff deficiat aut nullus sit, erit vertex in puncto A.

VI. Sin minus, qui sit casus sextus, ductis per puncta F & L rectis LFL, quæ intersecent supra dictas diametros AM vel iis in directum adjunctas in punctis N: erit vertex in N, vel citra, vel ultra A punctum cadens, prout termini dx & ff in æquatione vel signo + vel signo — affecti fuerint; uti & vel in hanc vel in illam partem ipsa Parabola pro varia termini dx affectione, ut supra notatum est, describenda erit.

Si denique z assumpta sit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$, ductâ, ut modò expositum fuit, A D ∞ c, ex puncto D (quod pro quantitatis c per signum + vel — affectione, ut supra, vel ab hac, vel ab illa parte lineæ AB sumi debet) ducenda est recta DO ipsi

VII. A M, quæ est ad eandem partem, parallela, si termini $\frac{bx}{a}$ & c eodem signo sint affecti, qui casus sit septimus.

VIII. At si diversè, qui sit casus octavus, ducenda est recta DP parallela ipsi A M, quæ est ab adversa parte lineæ A B, atque eadem DO vel DP sumenda est pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo DOE vel DPE æquales: eritque vertex punctum D, si terminus ff in æquatione deficiat.



IX. Sin minùs, qui sit casus nonus, erit idem vertex ipsarum DO vel D P diametrorum & linearum L F L communis intersectio, videlicet punctum Q, quodque iterum pro terminorum dx & ff per signum + vel — affectione vel citra vel ultra D punctum cadit; quemadmodum & ipsa Parabola vel versùs hanc

hanc vel versùs illam partem pro diversa termini dx affectione, ut supra est notatum, describenda est: Ac postremis quidem istis quinque casibus jam explicatis Parameter erit ad d cognitam, sicut A B ad A M, hoc est, erit ut A M ad A B, ita d ad Parametrum.

Quorum quidem omnium demonstratio perfacilis est. Intelligantur enim Parabolæ prædictis diametris ac parametris descriptæ, quæ per annotatos vertices transeant, sitque ordinatim ad easdem diametros applicatarum aliqua in recta O E utcunque sumpta, & supponatur easdem Parabolas prædictam applicatam secare in E puncto: & primo casu, cum pars diametri A B inter verticem A & quamlibet ad eandem diametrum applicatam intercepta, veluti A B, concipiatur, ut x, ac singulæ illæ applicatæ, ut y; sitque Parameter $\infty\, d$, atque ex natura Parabolæ [1] rectangulum sub dicta Parametro & recta A B contentum sit ∞ B E quadrato: erit $dx \infty yy$.

[1] per 1 primi hujus.

1\. Secundo casu, ubi vertex est in puncto F cum triplici distinctione, ut supra monitum est, notandum primò venit, in casibus, ubi æquatio est $yy \infty dx \pm ff$, punctum B in linea F B ab A versùs B indefinitè sumi posse: cum istis casibus ab A versùs B Parabolam describendam esse supra annotatum sit; At verò casu, ubi æquatio est $yy \infty ff - dx$, cum juxta Regulam Parabola in contrariam partem ab F versùs A sit describenda, punctum B non nisi inter F & A assumendum esse; id quod etiam ex ipsa æquatione manifestum est. Quoniam enim in prædicta æquatione $yy \infty ff - dx$ sive quod idem est $ff - yy \infty dx$, terminus ff major est quàm dx, utpote eundem excedens quantitate yy; idcirco quoque si utrinque divisio fiat per d, $\frac{ff}{d}$ majus erit quàm x. Quare cum secundùm Regulam $\frac{ff}{d}$ æquetur rectæ A F, & $x \infty$ rectæ A B, erit similiter recta A F major quàm A B; ideoque B punctum inter A & F puncta, sicut dictum est, cadet; id quod ad casus quoque sequentes applicatum esto. Porrò quoniam A F est $\infty \frac{ff}{d}$, erit F B (hoc est, observatâ triplici distinctione, ut prædictum est, A B $\pm$ A F, atque etiam A F — A B) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$; eâque multiplicatâ per parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$,

atque

atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ BE
2. sive yy; ac proinde $yy \propto dx \pm ff$, atque $yy \propto ff - dx$.

Tertio casu, ubi vertex est in puncto D, ac diameter in recta DK; quoniam AD seu BK est $\propto c$: erit KE, hoc est, BE $-$ BK $\propto y - c$; & KBE, hoc est, BE $+$ BK $\propto y + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y \pm c$, erit KE & KBE $\propto z$. Est autem DK seu AB $\propto x$, parameterque $\propto d$, & rectangulum sub dicta Parametro & recta DK contentum $\propto$ quadrato ex KE vel KBE. Quare cum hoc quadratum sit $\propto zz$, atque
3. rectangulum illud $\propto dx$, erit $zz \propto dx$.

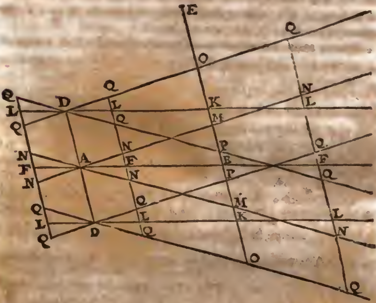
Quarto casu, ubi manente diametro in recta DK vertex est in puncto L, quoniam DL sive AF est $\propto \frac{ff}{d}$, erit LK (hoc est, observatâ triplici distinctione juxta Regulam, DK $\pm$ DL, atque etiam LD $-$ DK) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$. quâ multiplicatâ per Parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ KE vel KBE, hoc est, zz: eritque proinde $zz \propto dx \pm ff$, atque
4. $zz \propto ff - dx$.

Quinto casu, ubi vertex est in puncto A, diameterque in recta AM, cum sit ut a ad b, ita AB, hoc est, x, ad BM: erit BM $\propto \frac{bx}{a}$, ideoq; ME, hoc est, BE $-$ BM $\propto y - \frac{bx}{a}$, & MBE, hoc est, BE $+$ BM $\propto y + \frac{bx}{a}$. Et quoniam eo casu z assumpta est pro $y \pm \frac{bx}{a}$, erit ME & MBE $\propto z$. At cum in triangulo ABM cognita sint & angulus ABM, & ratio laterum AB, BM, dictum angulum comprehendentium, nota quoque est [1] ratio reliquorum dicti trianguli laterum ad invicem, atque in specie etiam lateris AB ad AM, quæ sit ut a ad e. Ac proinde cum sit ut a ad e, ita AB, h.e., x ad AM: erit AM $\propto \frac{ex}{a}$. Cumque porrò juxta Regulam eo casu sit ut AM ad AB, hoc est, ut e ad a, ita d ad Parametrum: erit Parameter $\propto \frac{ad}{e}$. Quâ multiplicatâ per AM seu $\frac{ex}{a}$; fiet rectangulum $\propto dx$. Quod æquale est quadrato applicatæ ME vel MBE, hoc est, zz; ac proin-
5. de est $zz \propto dx$.

[1] per 6 sexti.

Sexto

Sexto casu, ubi vertex est in puncto N, & diameter in recta NM, quoniam est ut AB ad AM, ita AF ad AN, hoc est, ut a ad c, ita $\frac{ff}{d}$ ad AN: erit AN ∞ $\frac{cff}{ad}$, & NM (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, AM $\pm$ AN, atque etiam NA — AM) æqualis $\frac{cx}{a} \pm \frac{cff}{ad}$, atque etiam $\frac{cff}{ad} - \frac{cx}{a}$. Quâ multiplicatâ per Parametrum $\frac{ad}{c}$, fit rectangu-



lum $dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod cum æquale sit quadrato applicatæ ME vel MBE, hoc est, zz: erit
6. $zz \infty dx \pm ff$, atque $zz \infty ff - dx$.

Septimo casu, ubi vertex est in puncto D, & diameter in recta DO, quoniam AD seu MO est ∞c, erit OE (sive BE — BM — MO) $\infty y - \frac{bx}{a} - c$, & OBE (sive BE + BM + MO) $\infty y + \frac{bx}{a} + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y - \frac{bx}{a} - c$, vel pro $y + \frac{bx}{a} + c$: erit OE & OBE ∞z. Porrò cum DO

 seu

ſeu AM ſit $\propto \frac{ex}{a}$, Parameterque ſectionis $\propto \frac{ad}{e}$, erit rectangulum ſub Parametro & recta DO contentum $\propto dx$. Cumque idem illud rectangulum æquetur quadrato applicatæ OE vel
7. OBE, id eſt, zz: erit $zz \propto dx$.

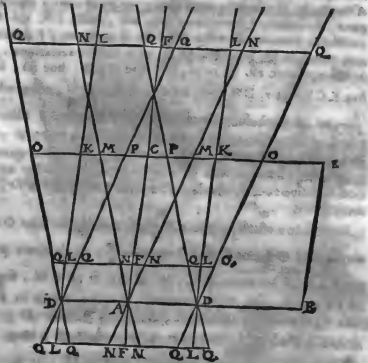
Octavo caſu, ubi, manente vertice in puncto D, diameter eſt in recta DP, quoniam AD ſeu BK eſt $\propto c$, & KP $\propto \frac{bx}{a}$, erit PE una (ſive BE — BK + KP) $\propto y - c + \frac{bx}{a}$, & PE altera (ſive BE + BK — KP) $\propto y + c - \frac{bx}{a}$. Cumque eo caſu z aſſumpta ſit pro $y + \frac{bx}{a} - c$ vel pro $y - \frac{bx}{a} + c$: erit utraque PE $\propto z$. Porrò cum DP ſeu AM ſit $\propto \frac{ex}{a}$, ac Parameter $\propto \frac{ad}{e}$: erit rectangulum ſub Parametro & recta DP contentum $\propto dx$. Cumque idem rectangulum æquale ſit quadrato utriuſque ap-
8. plicatæ PE, hoc eſt, zz: erit quoque $zz \propto dx$.

Nono caſu, ubi vertex eſt in puncto Q, & diameter in recta QO vel QP, quoniam, ut ſupra, OE eſt $\propto y - \frac{bx}{a} - c$, atque OBE $\propto y + \frac{bx}{a} + c$; at verò PE una $\propto y - c + \frac{bx}{a}$, ac PE altera $\propto y + c - \frac{bx}{a}$, ſitque eo caſu z aſſumpta pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$: erit OE, OBE, atque utraque PE $\propto z$. Et cum DO aut DP ſeu AM ſit $\propto \frac{ex}{a}$, atque DQ ſeu AN $\propto \frac{eff}{da}$: erit QO vel QP (hoc eſt, obſervatâ juxta Regulam triplici diſtinctione, DO vel DP $\pm$ DQ, atque etiam QD — DO vel DP) æqualis $\frac{ex}{a} \pm \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Unde ſi eadem QO vel QP multiplicetur per Parametrum $\propto \frac{ad}{e}$, erit rectangulum $\propto dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod quidem rectangulum cum æquale ſit quadrato applicatæ OE, OBE, aut utriuſque PE,
9. hoc eſt, zz: erit quoque $zz \propto dx \pm ff$, atque $zz \propto ff - dx$. Quæ quidem omnia ſunt, quæ hic demonſtranda erant.

Quod autem ad æquationes ſuperioribus novem caſibus converſim correſpondentes ſpectat, ut lineæ Parabolicæ deſcribantur, quæ ſint Loca quæſita: poſitis iiſdem, ut ſupra, per punctum

punctum A ducenda est recta AC ipsi BE parallela, ac deinde ipsa AC, ubique consideranda, ut considerata fuit recta AB in superiori figura. Porrò sumpto in eadem AC puncto utcunque, veluti C, atque per id ductâ rectâ ipsi AB parallelâ, velut OCE, erit similiter hæc OCE ubique consideranda, sicut considerata fuit recta OBE in præcedenti figura, nullâ scilicet aliâ mutatione adhibitâ. Exempli gratiâ, si æ-

I. quatio sit $dy \infty xx$, erit AC diameter, A vertex, & Parame-



ter ∞d. Cum enim AC seu BE sit concepta ut y, & CE seu AB ut x, rectangulumque sub Parametro & AC contentum, hoc est, dy, æquetur quadrato rectæ CE seu AB, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy \infty xx$.

II. Si æquatio sit $dy. ff \infty xx$, sumptâ AF $\infty \frac{ff}{d}$, erit F vertex, manente diametro in recta FC, atque Parametro ∞d. Est

enim

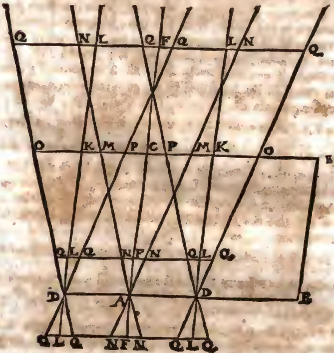
enim pro triplici juxta Regulam distinctione FC $\infty\, y \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro ac eadem FC contentum $\infty\, dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ CE, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy.ff \infty\, xx$.

III. Si æquatio sit $dy \infty\, vv$, vel $dy.ff \infty\, vv$, atque v primùm assumpta sit pro $x \pm e$, factâ AD $\infty\, e$, sumptoque puncto D ab A versùs B, si v sit assumpta pro $x - e$; at contra ab altera parte, si v assumpta fuerit pro $x + e$, erit, ductâ DK ipsi AC parallelâ, diameter in recta DK. Et si terminus ff deficiat,
IV. erit vertex in D; sin secus, in L, cum triplici variatione, ut supra expositum est. Et patet, DB sive DAB, hoc est, KE sive KCE fore v, DK $\infty\, y$, atque LK $\infty\, y \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro d dictaque DK comprehensum $\infty\, dy$; at verò id quod sub d & LK comprehenditur $\infty\, dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit aut supponatur quadrato applicatæ KE sive KCE, hoc est, vv: erit, ut petitur, $dy \infty\, vv$, vel $dy.ff \infty\, vv$.

V. Sit deinde v assumpta pro $x \pm \frac{by}{a}$, sumptoque in linea OCE puncto M à C versùs E, si habeatur $-\frac{by}{a}$; at ab altera parte lineæ AC, si habeatur $+\frac{by}{a}$, ita ut AC sit ad CM, sicut a ad b: erit in recta AM diameter, ejusque vertex in pun-
VI. cto A, si terminus ff deficiat; sin minus, in N. Et posita ratione AC ad AM, ut a ad e, ac proinde rectâ AM $\infty\, \frac{ey}{a}$, erit Parameter $\infty\, \frac{ad}{e}$. Est enim recta CM $\infty\, \frac{by}{a}$, ac proinde ME $\infty\, y - \frac{by}{a}$, atque MCE $\infty\, y + \frac{by}{a}$, id est, ME vel MCE $\infty\, v$. Quoniam ergo ex natura Paraboles rectangulum sub dicta Parametro & recta AM contentum ∞ quadrato ex ME vel MCE, erit $dy \infty\, vv$.

Porrò cum NA sit $\infty\, \frac{ffe}{da}$, erit NM $\infty\, \frac{ey}{a} \pm \frac{ffe}{da}$, atque etiam

etiam $\frac{ffe}{aa} - \frac{ey}{a}$: ideoque rectangulum ſub Parametro & recta NM contentum $\infty\ dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum ſit ∞ quadrato ex ME vel MCE, hoc eſt, vv; erit quoque $dy . ff \infty vv$.



Sit denique v aſſumpta pro $x \pm \frac{by}{a} \pm c$: eritque, ſup-
VII. VIII. poſitis iiſdem quæ ſupra, diameter in DO, vel in DP;
IX. &, ſi terminus ff deficiat, vertex in D; ſin minus, in Q.
Et poſitâ ratione DK ad DO, ut & DK ad DP, ſicut a ad e, ac proinde rectâ DO, ut & DP $\infty \frac{ey}{a}$; erit parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Eſt enim OE $\infty\ x - \frac{by}{a} - c$, atque

OCE $\infty\, x + \frac{by}{a} + e$; itemque PE una $\infty\, x - \frac{by}{a} + e$, ac PE altera $\infty\, x + \frac{by}{a} - e$, hoc est, OE, OCE, & PE una vel altera erit $\infty\, v$. Estque QO vel QP (sicut supra NM) $\infty\, \frac{ey}{a}\ 8\ \frac{ffe}{aa}$, atque etiam $\frac{ffe}{aa} - \frac{ey}{a}$: ac proinde rectangulum sub Parametro & QO vel QP $\infty\, dy\ 8\ ff$, atque etiam $ff - dy$. Quare cum idem rectangulum æquale sit quadrato ex OE vel OCE, aut ex una alteravé PE, id est, vv: erit quoque $dy.ff \infty vv$.

Atque ita demonstratum est generaliter, quod hoc loco propositum fuit.

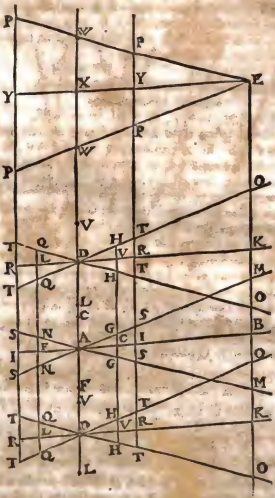
At si denique æquatio similis sit alicui formularum sub N° 3 comprehensarum, erit Locus quæsitus, si terminus in quo invenitur xx vel vv signo + sit affectus, Hyperbola; sin idem terminus signo — affectus sit, Ellipsis: excepto tantùm, cùm posteriori casu ordinatim ad diametrum applicatæ cum ea rectos angulos faciunt, & simul transversa diameter parametro est æqualis: quippe eo casu, ut patet, quæsitus Locus Circulus existit.

Et primo quidem casu, cùm nempe terminus in quo xx vel vv signo + affectus reperitur, ac proinde Locus quæsitus est Hyperbola, erit quoque terminus ff cum illo ab eadem æquationis parte constitutus vel signo + affectus, vel contra; & si signo — affectus sit, atque in æquatione habeatur fractio, ipsa majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz rejiciatur. Quo facto, remanente utrâque quantitate incognitâ primùm conceptâ, sequenti formâ se exhibebit æquatio: $yy \infty \frac{lxx}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$: eritque, ut in sequenti figura, casu primo, nempe si terminus ff cum termino in quo xx unam æquationis partem constituens signo + affectus sit, diameter Hyperbolæ describendæ in recta AX, quæ ducitur per punctum A positione datæ BE parallela. Sin contra, hoc est, si terminus ff signo — affectus sit, uti casu secundo, erit diameter in data positione recta AB, quæ indeterminatè pro x concipitur; ita ut ad

Casus 1mus, cùm Locus est Hyperbola.

easdem

easdem diametros ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABE æquales: eritque casu utroque centrum Hyperboles in puncto A, & semi-latus transversum ∞ f, quod in



dictis diametris respectivè per lineas AC vel AF exprimatur. Porrò si l sit ∞ g, vel, quod idem est, si termino xx vel yy nulla adhæreat

hæreat fractio, erunt latera transversum & rectum sibi invicem æqualia. At verò positis l & g inæqualibus, erit ratio lateris transversi ad rectum ut l ad g.

Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum C in utraque diametro versùs X & versùs B respectivè; supponaturque eandem secare rectam XE, quæ ducta sit ipsi AB æquidistans, ut & ipsam BE, ad dictas diametros respectivè ordinatim applicatas, in puncto E: erit

$$FX \propto y+f, \qquad FB \propto x+f,$$
$$CX \propto y-f. \qquad CB \propto x-f;$$

ideoque rectangulum

$$FXC \propto yy-ff, \; \& \; FBC \propto xx-ff.$$

Cum autem latere recto ipsi transverso æquale existente rectangulum FXC [1] sit $\propto$ quadrato ex XE seu AB, hoc est, xx: itemque rectangulum FBC sit $\propto$ quadrato ex BE, hoc est, yy: erit $yy-ff \propto xx$, hoc est, $yy \propto xx+ff$, itemque

$$xx-ff \propto yy, \text{ sive } yy \propto xx-ff.$$

[1] per 10 primi hujus.

Sed cum secus recto latere ipsi transverso inæquali existente unius ad alterum ratio sit, ut l ad g; similiterque etiam ratio rectanguli FXC ad quadratum XE, aut rectanguli FBC ad quadratum BE eadem sit [2], quæ transversi lateris ad rectum, hoc est, eadem quæ l ad g: erit ut l ad g, ita $yy-ff$ ad xx; itemque ut l ad g, ita $xx-ff$ ad yy; hoc est, reductâ proportione ad æqualitatem, erit $lxx \propto gyy-gff$, ut & $lyy \propto gxx-gff$. Unde divisis omnibus per g, fit $\frac{lxx}{g} \propto yy-ff$, hoc est, $yy \propto \frac{lxx}{g}+ff$; & $\frac{lyy}{g} \propto xx-ff$. Quod demonstrandum erat.

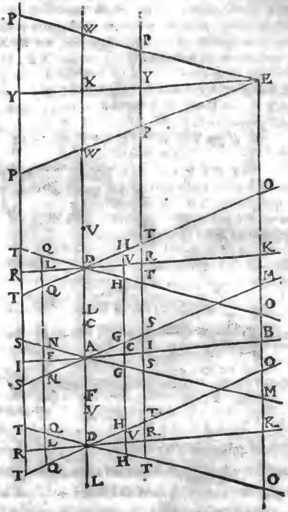
[2] per 10 primi hujus.

Casus 2dus, cùm Locus est Hyperbola.

At si quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ, aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $zz \propto \frac{lxx}{g}+ff$ (id est, $zz-ff \propto \frac{lxx}{g}$), vel $\frac{lzz}{g} \propto xx-ff$: aut z assumpta erit pro $y \; 8 \; c$, vel pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, aut

§. 1. pro $y \; 8 - \frac{bx}{a} \; 8 \; c$. Et quidem primò si z assumpta sit pro $y \; 8 \; c$, ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela & $\propto c$; ita ut, si z fuerit assumpta pro $y-c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ AB, quâ datus vel conceptus est angulus ABE. Sin contra z fuerit assumpta pro $y+c$, idem illud punctum

ctum D reperiatur ab altera parte lineæ A B. Deinde per punctum D ductâ rectâ DK ipsi A B parallelâ, quæ secet rectam BE productam, si opùs fuerit, in puncto K: erit describendæ Hyperbolæ



diameter, si terminus *ff* signo + affectus sit, in recta D X. sin contra, hoc est, si terminus *ff* signo — affectus sit, in prædicta

 recta

recta DK; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE vel DKE sive DXE æquales. Eritque casu utroque D centrum, & semi-latus transversum ∞f, quod in dictis diametris respectivè per lineas DV vel DL exprimatur; eritque porrò transversi lateris ad rectum ratio, ut l ad g. Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum V in utraque diametro, versùs X & K respectivè, eademque secare supponatur rectam XE, ut & ipsam KE, ad dictas diametros ordinatim applicatas, in puncto E: erit DAX sive KBE $\infty y+e$, & DX seu KE $\infty y-e$; ideoque eadem DAX & KBE vel DX & KE ea ipsa, quæ pro z est assumpta: ac propterea LX $\infty z+f$, & LK $\infty x+f$

atque VX $\infty z-f$, & VK $\infty x-f$:

ideoque rectangula

LXV $\infty zz-ff$, & LKV $\infty xx-ff$.

Cumque eadem sit ratio tam unius quàm alterius rectanguli LXV ad quadratum XE, ut & utriusque rectanguli LKV ad quadratum ex KE vel KBE respectivè, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit quoque ut

l ad g, ita $zz-ff$ ad xx,

itemque ut l ad g, ita $xx-ff$ ad zz:

hoc est, revocatâ proportione ad æqualitatem,

erit $\frac{lxx}{g} \infty zz-ff$, sive $zz \infty \frac{lxx}{g}+ff$,

& $\frac{lzz}{g} \infty xx-ff$: aut, si l sit ∞g,

erit $zz \infty xx+ff$,

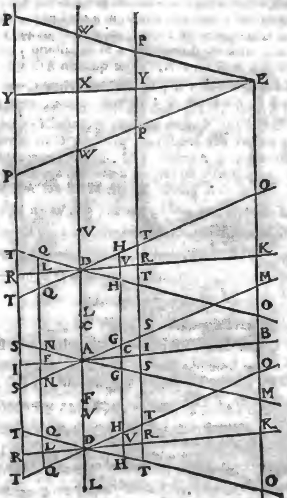
& $zz \infty xx-ff$.

Quod quidem hîc demonstrandum erat.

At verò secundò, si z assumpta sit pro $y \mathrel{8} \frac{bx}{a}$, sumpto in linea BE puncto M, ita ut AB ad BM sit, sicut a ad b; hoc est, ut BM sit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB quâ datus vel conceptus angulus ABE sumendum est; sed contra, si habeatur $z \infty y+\frac{bx}{a}$, ab altera parte ejusdem lineæ AB sumi debet,) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere AM, secantem HCH & QFQ per prædicta puncta C & F ductas ipsi BE parallelas in punctis G & N.

Quo

Quo facto, si terminus ff signo + affectus sit, erit quæsitæ Hyperbolæ diameter in recta AW ipsi BE parallela, ad quam ordinatim applicatæ, ut EW, sunt ipsi AM æquidistantes. Sin con-



tra, hoc est, si terminus ff signo — sit affectus, erit diameter in prædicta recta AM, ita ut ordinatim ad eam applicatæ cum ipsa

faciant angulos angulo AME vel AMBE æquales: eritque tam unius quam alterius Hyperbolæ centrum in puncto A. Et quantum ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperboles, quæ ad diametrum AW describitur, semi-latus transversum ∞f (idque iterum exprimatur per AC vel AF), & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg; posito nimirum quòd ratio ipsius AB ad ductam AM sit ut a ad e; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum AM describitur, semi-latus transversum erit AG vel AN. Quæ quidem AG vel AN erit $\infty \frac{ef}{a}$; cum sit ut AB ad AM, sive ut a ad e; ita AC vel AF, hoc est, f, ad AG vel AN; & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Si enim prædicta Hyperbola descripta intelligatur, transiens per prædictum punctum C in diametro AW & per punctum G in diametro AM, præsupponaturque rectam ME vel WE ordinatim ad easdem diametros applicatas à prædicta Hyperbola secari in puncto E: erit MBE vel AXW $\infty y + \frac{bx}{a}$, & ME vel AW $\infty y - \frac{bx}{a}$, hoc est, AXW seu MBE, uti & AW seu ME ea ipsa erit, quæ pro z assumpta est. Est autem AM seu WE $\infty \frac{ex}{a}$, ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AW, (cùm nempe terminus ff signo + est affectus) FW sive FXW $\infty z + f$,

& CW sive CXW $\infty z - f$:

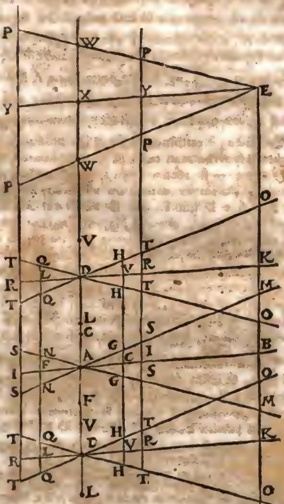
ideoque rectangulum

FWC vel FXWC $\infty zz - ff$, & quadratum WE $\infty \frac{eexx}{aa}$.

Cumque sit ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad prædictum quadratum, hoc est, eo casu ut aal ad eeg, ita $zz - ff$ ad $\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, &, omnibus per eeg divisis, $\frac{lxx}{g} \infty zz - ff$, id est, $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AM, cùm nempe terminus ff signo — est affectus, erit NM $\infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & GM $\infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$: ideoque rectangulum NMG $\infty \frac{eexx}{aa} - \frac{eeff}{aa}$. Cumque sit ut latus transversum ad rectum, id est, hoc casu, ut eel ad aag, ita prædictum rectangulum NMG

ad ME vel MBE quadratum, hoc eſt, ad zz: erit ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: ac proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$.

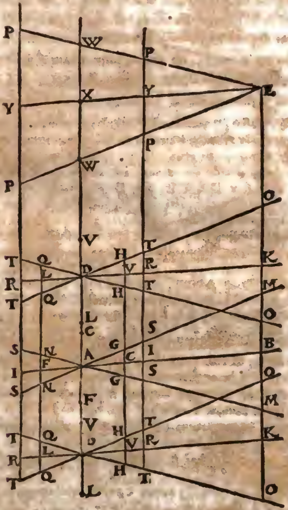


Hoc eſt, factâ diviſione per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quod hic demonſtrandum erat.

 Si

§. 3. Si denique tertiò z assumpta sit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$, ductâ, ut supra, AD $\infty \; c$, & DK ipsi AB parallelâ, sumptoque in linea KE puncto O; ita ut DK ad KO sit, sicut a ad b, hoc est, ut KO sit $\infty \; \frac{bx}{a}$, ducenda est per puncta D & O recta DO, secans prædictam HCH in H, atque occurrens præfatæ QFQ in Q. (Constat autem ex superiùs explicatis prædictum punctum O, si in æquatione habeatur $- \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB sumendum esse, quâ datus aut assumptus est angulus ABE; at si habeatur $+ \frac{bx}{a}$, illud ipsum punctum ex altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, si terminus ff signo $+$ affectus sit, erit diameter quæsitæ Hyperbolæ in recta DW. Sin contra, hoc est, si terminus ff signo $-$ sit affectus, erit ipsa in prædicta recta DO; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant angulo DWE sive DXWE, aut DOE sive DOKE æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto D. Et quantùm ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperbolæ, quæ ad diametrum DW describitur, hoc est, cùm terminus ff signo $+$ afficitur, semi-latus transversum $\infty \; f$ idque hîc iterum exprimatur per DV vel DL, ac ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut aal ad eeg; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum DQ describitur, nimirum, quando terminus ff signo $-$ affectus est, erit semi-latus transversum recta DQ vel DH, id est, $\frac{ef}{a}$; atque ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut eel ad aag. Si enim descripta intelligatur Hyperbola, transiens per punctum V in diametro DW & per punctum H in diametro DO, supponaturque eandem Hyperbolam secare rectam WE vel OE in puncto E, erit OKBE sive DAXW $\infty \; y + c + \frac{bx}{a}$, & OE sive DW $\infty \; y - c - \frac{bx}{a}$, ac OBE sive DAW $\infty \; y + c - \frac{bx}{a}$, atque OKE vel DXW $\infty \; y - c + \frac{bx}{a}$. Hoc est, erunt omnes illæ prænominatæ lineæ eædem, quæ pro z assumptæ sunt. Est autem DO seu WE $\infty \; \frac{ex}{a}$, ideoque quadratum WE $\infty \; \frac{eexx}{aa}$: ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum DW,

DW, cùm nempe terminus ff signo $+$ afficitur, LW sive LXW $\infty z+f$, & VW sive VXW $\infty z-f$: ideoque rectangulum LWV sive LXWV $\infty zz-ff$. Cumque sit ut latus



transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad WE quadratum, hoc est, eo casu, ut aal ad eeg, ita $zz-ff$ ad

eexx

$\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, ac, divisis omnibus per eeg, $\frac{lxx}{g} \infty zz - ff$, sive $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum DO, erit $QO \infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & $HO \infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$; id eoque rectangulum $QOH \infty \frac{eexx - eeff}{aa}$. Cumque iterum sit, ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum QOH ad quadratum ex OKBE vel OE, sive OBE aut OKE: id est, eo casu, ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: erit quoque proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$. Hoc est, divisis omnibus per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quæ quidem omnia sunt, quæ casu superiori in triplici sua distinctione determinanda ac demonstranda erant.

Casus 3tius, cum Locus est Hyperbola.

Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum, alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $yy \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \infty \frac{lvv}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty vv - ff$; atque ipsa v tantùm assumpta sit pro x 8 notâ aliquâ quantitate, Sit v assumpta pro x 8 b; Hoc casu in linea AB vel eâdem productâ sumendum est punctum I, ita ut AI sit ∞b (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - b$, ab A versùs B; Sin contra, ab altera parte puncti A in producta BA sumi debet.) Quo facto, erit idem illud punctum I centrum describendæ Hyperboles, & mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra casu 1mo memoratum est, nempe, diameter in recta IY vel in recta IB, semi-latus transversum ∞f, atque proportio lateris transversi ad rectum, ut l ad g.

Casus 4tus, cum Locus est Hyperbola.

Si denique quantitatum incognitarum, primò conceptarum, utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $zz \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $zz - ff \infty \frac{lvv}{g}$), aut $\frac{lzz}{g} \infty vv - ff$; atque z primùm assumpta sit pro y 8 c, ducenda est utrinque IR parallela BE, & ∞c: quo facto, erit idem illud punctum R centrum, & diameter in recta RY

vel

vel RK, ejusque semi-latus transversum ∞ f, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia, mutatis mutandis, casu secundo §. 1. fusiùs explicata sunt.



§. 2. At si z assumpta fuerit pro $y \,8\, \frac{bx}{a}$, erit punctum S, in

 quo

quo M A, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam I R, vel eandem productam, si opùs sit, intersecatur, centrum sectionis; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2. memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta SP vel SM (atque ut ibidem AM seu EW erat ∞ $\frac{ex}{a}$, ita hic SM seu EP erit ∞ $\frac{ev}{a}$: cum sit ut A B ad A M, hoc est, ut *a* ad *e*, ita B I, hoc est, *v*, ad SM); eritque porrò semi-latus transversum ∞ *f* & $\frac{ef}{a}$ respectivè, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut *aal* ad *eeg*, vel ut *eel* ad *aag*.

§. 3. Si denique *z* assumpta fuerit pro *y* 8 $\frac{bx}{a}$ 8 *c*, erit punctum T, in quo DO, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel productam, si opùs sit, intersecatur, centrum; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti, & supra casu secundo §. 3. fusiùs expositum est. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicitè est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hic cum prioribus conveniant, excepto tantùm, quòd, quæ ibidem designabantur per *x*, hic sint *x* 8 *b*, hoc est, *v*. Ita enim quod ibi erat A B & E X ∞ *x*, hic est I B & E Y ∞ *v*; quod ibi erat D K & E X ∞ *x*, hic est R K & E Y ∞ *v*; quod ibi erat A M & E W ∞ $\frac{ex}{a}$, hic est S M & E P ∞ $\frac{ev}{a}$; quod ibi erat D O & E W ∞ $\frac{ex}{a}$, hic est T O & E P ∞ $\frac{ev}{a}$.

Quamvis autem secundùm Regulam accidere etiam possit, ut *v* composita sit ex *x* 8 aliâ quâdam quantitate, cui & incognita *y* permixta sit; ita tamen, ut eo casu *z* solummodò ex *y* 8 aliâ quantitate in totum cognitâ constare queat, haudquaquam tamen operæ pretium existimamus, casus omnes eò spectantes speciatim persequi: cum ex iis, quæ tam in Locis Parabolicis quàm in posteriori exemplo reductionis æquationum ad formulas Theorematum 12^{mi} & 13^{tii} superiùs explicata sunt, iidem illi casus per se manifesti sint atque in præcedentibus etiam omnino plenéque comprehendantur; si nimirum, substituto per omnia *x* loco *y* & vice versâ, eadem *x* non per rectam A B sed per eam, quæ ex A ipsi BE parallela ducta sit, atque *y* non per B E sed per rectam ipsi A B æquidistantem, designetur. Quòd hic generaliter monuisse sufficerit.

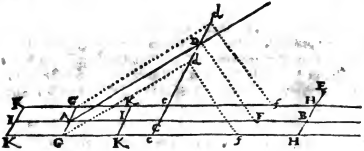
Alii quatuor casus, cùm Locus est Hyperbola.

Jam verò quod supra annotavimus accidere quoque posse, ut æquatio sit

$$1.\ yx \propto ff,$$
$$2.\ zx \propto ff,$$
$$3.\ yv \propto ff,$$
$$4.\ zv \propto ff;$$

omnibusque istis casibus Locum quæsitum esse Hyperbolam, ejus determinatio sive descriptio atque demonstratio ex iis, quæ jam ante explicata sunt, sponte quoque profluunt.

Primo enim casu, si in recta A B sumatur A C $\propto f$, atque ex puncto C eductâ rectâ C D, quæ ipsi B E sit æquidistans & æqualis priori A C, hoc est $\propto f$, per A & D recta linea ducatur: erit A centrum Hyperbolæ, cujus axis est in recta A D, & punctum D vertex, atque A B asymptotos. sive (ductâ rectâ D F ad A D perpendiculari ac in A B terminata) erit A D semi-latus transversum, & ratio transversi ad rectum, ut A D quadratum ad D F



quadratum. Si namque prædicta Hyperbole secare supponatur rectam B E in puncto E, erit [1] rectangulum A B E $\propto$ quadrato ex A C vel C D. Quare cum A B sit $\propto x$, B E $\propto y$, & A C $\propto f$: erit $xy \propto ff$. Quod primo casu erat demonstrandum.

[1] *per 3 primi hujus.*

Secundo casu, cùm nempe æquatio est $zx \propto ff$, oportet ut z juxta Regulam sit assumptâ pro y & notâ quâdam quantitate. Esto

 itaque

itaque assumpta pro $y \; 8 \; c$, atque idcirco ad describendam Hyperbolam ducatur per punctum A recta AG ipsi BE parallela, ac $\infty \; c$: sumpto nimirum puncto G vel ab hac vel ab illa parte lineæ AB, prout c quantitas signo + vel — fuerit affecta; ductâque porrò GH ipsi AB parallelâ, centro G, Asymptoto GH, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, Hyperbola describatur. Hæc igitur si secare supponatur rectam BE in puncto E, erit rectangulum GcCd, vel GcDd $\infty \; ff$. Unde cum sit GH $\infty \; x$, & HE vel HBE $\infty \; y \; 8 \; c$, id est, z: erit GHE vel GHBE rectangulum $\infty \; zx$, ac propterea $zx \infty ff$. Quod 2do casu demonstrandum erat.

Tertio casu, nempe si æquatio sit $yv \infty ff$: v quoque tantùm pro $x \; 8$ notâ quâdam quantitate sumpta sit oportet, veluti pro $x \; 8 \; b$. Ideoque ad inventionem Loci quæsiti, in recta AB vel in ipsâ productâ sumenda est AI $\infty \; b$, ac porrò centro I, atque Asymptoto IAB vel IB, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, describenda est Hyperbola, quæ si rectam BE secare supponatur in E: erit rectangulum IABE vel IBE $\infty \; ff$. Quare cum IAB vel IB sit $\infty \; x \; 8 \; b$, hoc est, v, & BE $\infty \; y$: erit $yv \infty ff$. Quod 3tio casu demonstrandum erat.

Denique quarto casu, si nempe æquatio sit $zv \infty ff$: erit z assumpta pro $y \; 8 \; c$, & v pro $x \; 8 \; b$. Ideoque per prædictum punctum I ducenda est IK ipsi BE æquidistans & $\infty \; c$; ductâque KH ipsi AB parallelâ, centro K, atque Asymptoto KGH vel KH, cæterisque, ut casu 1mo, mutatis mutandis Hyperbole describenda est, quæ si secare supponatur rectam BE in E: erit rectangulum KGHE vel KHE, ut & KGHBE vel KHBE $\infty \; ff$. Hinc cum HBE vel HE sit $\infty \; y \; 8 \; c$, id est, z, & KGH vel KH $\infty \; x \; 8 \; b$, hoc est, v: erit $zv \infty ff$. Quod 4to casu demonstrandum erat.

Atque hæc quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Locorum eo casu, quo iidem sunt in linea Hyperbolica, consideranda veniunt.

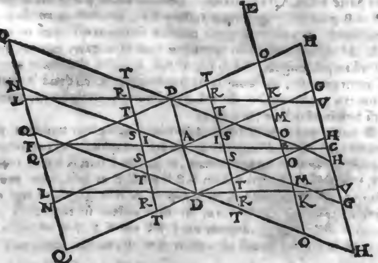
Altero autem casu generali formularum sub Nro 3. comprehensarum, cùm nempe terminus, in quo invenitur xx vel vv signo — sit affectus, ac proinde Locus quæsitus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, si in æquatione fractio reperiatur, rejici quoque illa poterit majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz. Quo facto primò, remanente utrâque quantitate

inco-

incognitâ ab initio conceptâ, sequenti formulâ se exhibebit æquatio $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$: eritque, ut in sequenti figura, describendæ Ellipseos diameter in recta AB, quæ pro x indeterminatè est concepta, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE æquales; ac centrum in puncto A, & semi-latus transversum ∞f. id quod in dicta diametro per lineam AC vel AF exprimatur, eritque ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut l ad g. *Casus tertius, cùm Locus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit.*

Si enim descripta intelligatur prædicta Ellipsis, transiens per puncta C & F, secansque applicatam BE in puncto E: erit FB $\infty f + x$, & BC $\infty f - x$: ideoque rectangulum FBC $\infty ff - xx$. At cum ex natura Ellipseos, lateribus recto transversoque æqualibus, prædictum rectangulum FBC [1] sit ∞ quadrato ex BE, hoc est, yy: erit quoque proinde eo casu $yy \infty ff - xx$. Et facilè

[1] *per 13 primi hujus.*



apparet, si, iisdem positis, BE super rectam FC foret quoque perpendicularis, hoc est, ut angulus quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum sit rectus, prædictam curvam fore Circuli circumferentiam.

Cum autem porrò, lateribus transverso rectoque inæqualibus

per 13 primi hujus. atque in ratione ut l ad g, eadem sit ratio * rectanguli FBC ad BE quadratum, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: ex prædictis palàm est fore ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy, hoc est, esse $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod eo casu demonstrandum erat.

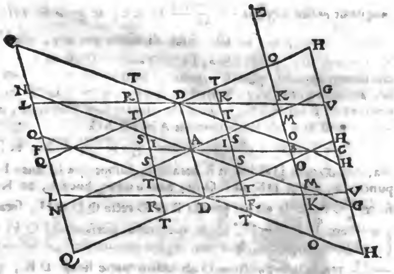
Casus 2dus, cùm locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia. At si, quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$: aut z assumpta erit pro $y \pm c$, aut pro $y \pm \frac{bx}{a}$, aut pro $y \pm c \pm \frac{bx}{a}$.

§. 1. Et primùm quidem, si z assumpta fuerit pro $y \pm c$, ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela ac $\infty\, c$, ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ AB, quâ datus vel conceptus est angulus ABE; sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum D ab altera parte lineæ AB reperiatur. Deinde ductâ per D rectâ DK ipsi AB parallelâ, quæ secet rectam BE, productam versùs B, si opus fuerit, in puncto K, erit quæsitæ Ellipseos diameter in recta DK, ad quam ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE seu DKE æquales. Punctum autem D centrum erit, & semi-latus transversum ∞f. quod in dictis diametris per lineas DV & DL exprimatur, eritque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

Si enim prædicta Ellipsis descripta intelligatur transiens per puncta L & V, quæ supponatur secare rectam BE, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam, in puncto E: erit KBE $\infty\, y + c$, & KE $\infty\, y - c$, ideoque eadem KBE vel KE ea ipsa, quæ pro z assumpta est. Cumque LK sit $\infty f + x$, & KV $\infty f - x$: erit rectangulum LKV $\infty ff - xx$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli LKV ad quadratum ex KBE vel KE, hoc est, ad zz, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad zz, hoc est, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. Quod quidem, si l sit ∞g, idem est ac $zz \infty ff - xx$. Atque hic iterum facilè apparet, quòd, existente angulo DKBE vel DKE recto, & $l \infty g$, hoc est, rectangulo LKV ∞ KE quadrato, prædicta curva Circulus sit futura.

§. 2. At verò, si z assumpta fuerit pro $y \pm \frac{bx}{a}$, sumpto in linea BE, pro-

productâ versùs B, si opùs fuerit, puncto M; ita ut AB ad BM sit, sicut a ad b, hoc est, ut BM sit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB, quà datus vel conceptus est angulus ABE, sumi debet; sin contra, z pro $y + \frac{bx}{a}$ assumpta fuerit, ab altera ejusdem lineæ AB parte sumendum est) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere NAMG, secantem rectam HCH, atque occurrentem ipsi QFQ, quæ per prædicta puncta C & F ipsi BE ductæ sunt æquidistantes, in G & N. Quo facto, erit quæsitæ Ellipseos diameter



in recta NG, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, angulo AME vel AMBE æquales. Porrò centrum ejusdem erit in puncto A, & semi-latus transversum erit recta AN vel AG, (quæ quidem AN vel AG, si ratio AB ad AM supponatur ut a ad e, æquabitur $\frac{ef}{a}$: cum sit ut AB ad AM, sive ut a ad e, ita AC, hoc est, f, ad AG.) Denique ratio transversi lateris ad rectum erit ut eel ad aag; id est, si l sit

∞g,

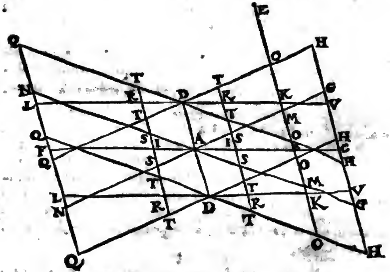
∞g, sive, quod idem est, si termino zz nulla adhæreat fractio, ut ee ad aa, hoc est, ut AM quadratum ad quadratum AB.

Etenim si prædicta Ellipsis descripta intelligatur, transiens per N & G, supponaturque eandem secare rectam ME vel MBE, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam in puncto E: erit eadem ME $\infty y - \frac{bx}{a}$, & MBE $\infty y + \frac{bx}{a}$, ac proinde ea ipsa, quæ pro z assumpta est. Cumque AM sit $\infty \frac{ex}{a}$, erit NM $\infty \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & MG $\infty \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: ideoque rectangulum NMG $\infty \frac{eeff}{aa} - \frac{eexx}{aa}$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli NMG ad quadratum ex MBE vel ME, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, eadem quæ eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz, ac proinde $eelzz$ $\infty eegff - eegxx$. id est, factâ divisione per eeg, erit $\frac{lzz}{g}$ $\infty ff - xx$. sive, positâ $l \infty g$, $zz \infty ff - xx$. Unde ex ante dictis iterum apparet, quòd si angulus AMBE vel AME rectus sit, ac simul $eel \infty aag$, hoc est, rectangulum NMG ∞ quadrato ex ME vel MBE, prædictam curvam fore Circulum, cujus centrum sit A, & semi-diameter AN vel AG.

§. 3. Denique si tertiò z assumpta sit pro $y \pm e \pm \frac{bx}{a}$, ductâ, ut supra, AD ∞e, & DK ipsi AB parallelâ, sumptoque in linea KE puncto O, ita ut DK ad KO sit, sicut a ad b, hoc est, ut KO sit $\infty \frac{bx}{a}$: ducenda est per puncta D & O recta QDOH, secans prædictam HCH in H, atque occurrens præfatæ QFQ in Q. (constat autem ex iis, quæ jam sæpiùs monita sunt, si habeatur $- \frac{bx}{a}$, prædictum punctum O ab eadem parte lineæ DK, quâ datus vel assumptus est angulus DKE, sumendum esse; at si habeatur $+ \frac{bx}{a}$, illud ipsum ab altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, erit describendæ Ellipseos diameter in prædicta recta QDH, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ

plicatæ cum ea angulos faciant, angulo DOKE vel DOE æquales. Porrò centrum erit in D, & semi-latus transversum DQ vel DH ∞ AN seu $\frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

Si enim quæsita Ellipsis descripta intelligatur, transiens per puncta Q & H, eademque secare supponatur rectam OE vel OKE in puncto E: erit OKBE ∞ $y+c+\frac{bx}{a}$, OE ∞



$y-c-\frac{bx}{a}$, OBE ∞ $y+c-\frac{bx}{a}$, & OKE ∞ $y-c+\frac{bx}{a}$: ac proinde prænominatæ illæ lineæ eædem erunt, quæ pro a assumptæ sunt. Cumque porrò sit DO seu AM ∞ $\frac{ex}{a}$, ideoque QO ∞ $\frac{ef}{a}+\frac{ex}{a}$, & OH ∞ $\frac{ef}{a}-\frac{ex}{a}$: erit rectangulum QOH ∞ $\frac{eeff-eexx}{aa}$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli QOH

ad quadratum ex OKBE vel OE, aut ad quadratum ex OBE vel OKE, quæ est transversi lateris ad rectum, hoc est, ut eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz; ac propterea $eelzz \infty eegff - eegxx$, &, divisis omnibus per eeg, $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. id est, si l sit ∞g, erit $zz \infty ff - xx$.

Atque hic iterum facilè apparet, si angulus DOKBE, DOE, DOBE, vel DOKE rectus foret, & simul $eel \infty aag$, prædictam curvam fore Circulum. Quæ quidem omnia sunt, quæ supra dicto casu in triplici sua variatione demonstranda erant.

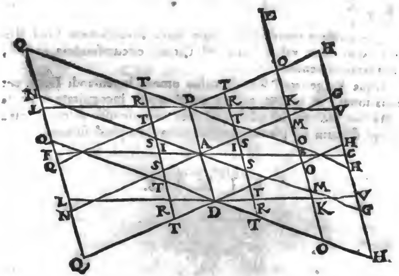
Casus 3tius, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia. Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio fit $\frac{lyy}{g} \infty ff - vv$, atque ipsa v assumpta sit pro x 8 notâ aliquâ quantitate; Sit v assumpta pro x 8 b, eritque eo casu in linea AB vel AF sumendum punctum I; ita ut AI sit ∞b. (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - b$, ab A versùs B; sin contra ab A versùs F sumi debet.) Quo facto, erit idem punctum I centrum describendæ Ellipseos, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra, casu primo memoratum est. Hoc est, diameter erit in recta IB, ac semi-latus transversum erit ∞f, atque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

Casus 4tus, cùm Locus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia est. Si denique quantitatum incognitarum primùm conceptarum utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio fit $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$; atque z primò assumpta sit pro y 8 c, ducenda est utrinque IR, parallela ipsi

§. 1. BE, ac ∞c. Quo facto, erit idem punctum R centrum Ellipseos, & diameter ejus in recta RK vel RL, eritque ejus semilatus transversum ∞f, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g. Quemadmodum ea omnia Casu 2do §. 1, mutatis mutandis, fusiùs explicata sunt.

§. 2. At si z assumpta fuerit pro y 8 $\frac{bx}{a}$, erit punctum S, ubi MA, vel,

vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam I R, productam, si opùs fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2 memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta SM; (atque ut ibidem erat $AM \infty \frac{ex}{a}$, ita hic SM erit $\frac{ev}{a}$: cum sit ut B A ad A M, hoc est, ut a ad e, ita B I, id est, v, ad S M:) eritque porrò semi-latus trans-



versum $\infty \frac{el}{a}$, & ratio transversi lateris ad rectum, ut eel, ad aag.

§. 3. Denique si z assumpta fuerit pro y 8 c 8 $\frac{bx}{a}$, erit punctum T, in quo DO, vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam I R, productam, si opùs fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti ac supra casu secundo §. 3

fusiùs explicatum est. Nempe erit diameter in recta TO, & semi-latus transversum $\infty \frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicitè est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant; excepto tantùm, quòd quæ ibidem designabantur per x, hîc designentur per $x \mathbin{8} b$, hoc est, v. Ita enim quòd ibi erat AB $\infty\ x$, hîc est IB $\infty\ v$; quod ibi erat DK $\infty\ x$, hîc est RK $\infty\ v$; quod ibi erat AM $\infty \frac{ex}{a}$, hîc est SM $\infty \frac{ev}{a}$; & quod ibi erat DO $\infty \frac{ex}{a}$, hîc est TO $\infty \frac{ev}{a}$.

Quæ quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Loci illo casu, quo idem vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, consideranda veniunt.

Atque ita generali Regulâ casus omnes inveniendi Loca per æquationes, in quibus neutra quantitatum incognitatum in se ducta nec factum sub iisdem ad tres dimensiones ascendit, sed vel quadratum vel planum non excedit, complexi sumus.

FINIS.

FRANCISCI à SCHOOTEN,
LEIDENSIS,
dum viveret in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

TRACTATUS DE CONCINNANDIS DEMONSTRATIONIBUS GEOMETRICIS ex Calculo Algebraico.

In lucem editus
à
PETRO à SCHOOTEN,
Francisci Fratre.



FRANCOFURTI,
Apud JOHANNEM FRIDERICUM KNOCH.
cIↄ Iↄc xcv.

Nobilissimis & Splendidissimis Viris, Academiæ Lugdunensis Curatoribus vigilantissimis,

D. AMELIO à BOUCHORST, Wimmenumi Domino, de Ordine Equestri in Delegatos Præpotentium Hollandiæ Ordinum adscripto, & ejusdem honoratissimi Collegii Præsidi, Rhenolandiæ Aggerum Comiti, &c.

D. GERARDO SCHAEP, J. C. Cortenhoevii Domino, Exlegato ad Serenissimos Daniæ Sueciæque Reges, antehac in Consessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Hollandiæ Consiliariorum Delegato, Magnificæque Reip. Amstelædamensis Exconsuli, & nunc Ærarii urbani Præfecto.

D. CORNELIO DE BEVERE, Equiti Aurato, Strevelshoeckii, West-isselmondæ, Lindæ, &c. Domino, Exlegato ad Serenissimos Magnæ Britanniæ Daniæque Reges, Exconsuli primæ in Hollandiâ Dordrechtanorum Urbis, in Concilio Præpotentium Hollandiæ Ordinum ordinario Assessori.

EORUMQUE COLLEGIS,

Amplissimis, Spectatissimisque, florentissimæ Reipublicæ Leidensis Consulibus,

D. CORNELIO à BUYTEVEST.

D. GUILHELMO PAETS, J. C. Aggerum Rhenolandiæ Chomarcho, &c.

D. PAULO à SWANENBURG, J. C. in Præpotentium fœderati Belgii Ordinum Consessu Hollandiæ nomine Delegato & Assessori.

D. RIPPARDO à GROENENDYCK, J.C.

NEC NON

Amplissimo, Consultissimoque Viro,

D. JOHANNI à WEVELINCHOVEN, J. C. Reip. Leidensis Syndico, & DD. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

Nobilissimi atque Amplissimi Viri, Domini plurimum honorandi,

GEminam assequendæ veritatis methodum, quarum altera Synthesis sive Compositio dicta; altera Analysis vocata sive Resolutio, cumprimis in Mathesi à Veteribus frequentatam tritamque fuisse, palam faciunt celebria eorundem monumenta. Quorum imitari exempla cupiens meus p. m. Frater, postquam methodo Synthetica scientiæ hujus præclara multa publicis tam scriptis quam prælectionibus cum fructu tradidisset, ad Analysin quoque, certissimam inveniendi artem, ejusque perficiendæ rationem sua studia convertit. Neque dubitabat quin pleraque omnia, quæ Veteribus tantum gloriæ peperissent, Analyseos beneficio ac ope reperta essent: sed quæ illi, ut inventorum major admiratio foret, dissimulato hoc artificio & suppresso, vulgari tantum Syntheseos forma exhibuissent. Sed cum Veterum dissimulatione factum videret, hunc Analyticæ methodi præstantem usum non modo à multis ignorari ac negligi, sed ipsam ejus certitudinem ac evidentiam à nonnullis suspectam haberi, atque adeo soli Synthesi miserando labore inhæreretur: consultum judicavit hac peculiari diatriba ostendere, ipsum quoque Syntheticum demonstrandi modum in Analysi contineri, atque ex ea elici posse; ut eo argumento quemvis convinceret, quantum illa & prævaleat, & præferenda sit. Sed vix huic tractatui supremam imposuerat manum, cum, proh dolor, vita ejus, atque omnis reliqua de eo expectatio; intercedente fato abrupta fuit. At vero, ut posthumus idem atque novissimus industriæ ejus fœtus in publicam lucem, cui destinatus erat, rite & honeste prodire posset: ego, ut defuncti frater unicus, mei esse officii atque pietatis existimavi,

mavi, non tantum in me recipere editionis promovendæ ac juvandæ curam; ſed etiam pro veneratione & obſervantia, quæ vobis, Nobiliſſimi atque Ampliſſimi Domini, jure multiplici debetur, eundem fœtum inclytæ dignitati veſtræ ac honori conſecrare. Utique futurum ſpero, ut cujus ingenii primitias, illuſtribus veſtris nominibus olim inſcriptas, propitia benignitate excepiſtis, hunc quoque ultimum ejuſdem fructum gratioſe ſuſcipiatis. Neque ſolita humanitas veſtra obſtare ſinet meam offerentis tenuitatem, qui ſimul hoc quantulocunque conatu pro veſtris non modo in Fratrem, ſed etiam in p m Parentem meum, longi temporis beneficiis meritiſque gratum animum profiteri ac teſtari exoptem. Quod quidem pro illis, meque ipſo, luculentius aliquando me facturum confido, ſi & mihi, à prima ætate ſimilibus ſtudiis innutrito, benevolentiæ & favoris veſtri auram aſpirare contingat. Interim DEUM OPT. MAX. ſuppliciter oro, ut conſilia veſtra & pro Reip. ſalute atque Academiæ decore curas ſecundet, optimiſque ſucceſſibus donet.

Veſtrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

PETRUS à SCHOOTEN.

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN

Tractatus

De concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco.

LECTORI S.

Quoniam, quæ in Tractatu hoc docentur, evidentiùs per exempla quàm præcepta explicari atque intelligi possunt: sufficere judicavi variis diversorum generum exemplis rem apertissimè exponere, candidéque impertiri. Vale.

PROBLEMA.

Datam rectam AB, utcunque sectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum sub AD, DB comprehensum æquetur quadrato rectæ CD. *Vide sequentem figuram.*

Series *Analyseos* sive *Resolutionis*.

Supposito Problemate ut jam facto,

voco AC. a

CB. b

& BD vel DE. x: eritque AD. $a+b+x$, & CD. $b+x$.

Deinde ut habeatur æquatio,

Multiplico AD. $a+b+x$

per BD vel DE. x

Eritque rectangulum sub AD, DB comprehensum, hoc est, ▭ ADEF. $ax+bx+xx$.

Similiter, multiplico CD. $b + x$
per CD vel DG. $b + x$

$$\begin{array}{r} + bx + xx \\ bb + bx \\ \hline \end{array}$$

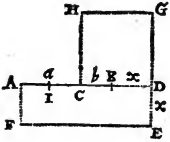
Et fit quadratum ex CD, hoc est, □ CDGH. $bb + 2bx + xx.$

Unde talis emergit æquatio
$$ax + bx + xx \infty bb + 2bx + xx.$$

Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx,
eritque $ax \infty bb + bx$. †

Deinde transferatur bx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una & cognitæ ab altera parte habeantur,
& fit $ax - bx \infty bb$.

Cujus utraque pars si dividatur per $a - b$,
invenietur $x \infty \frac{bb}{a-b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a - b$ ad b, ita b ad x.



Id quod docet, ad producendam AB usque ad D, qualis requiritur, sumendam esse CI æqualem CB, ita ut AI sit $\infty a - b$, ac deinde ad AI & IC vel CB, hoc est, ad $a - b$ & b, esse inveniendam 3tiam proportionalem BD.

Unde tale formari poterit Theorema, supponendo rectangulum ADB quadrato ex CD æquale esse.

Si AB producatur ad D, ita ut rectangulum ADB sit æquale quadrato ex CD: erit AC major quàm CB, & excessus AI ad IC vel CB eandem habebit rationem, quam CB ad BD.

Cujus demonstratio eodem ordine procedit quo Analysis, sequendo nimirum ejusdem vestigia, hoc pacto:

Cum

Cum enim ex hypothesi ▭ ADB sit ∞ □^to ex CD,

$$ax + bx + xx \infty bb + 2bx + xx$$

ablato utrinque ▭^lo sub CD & DB,

$$bx + xx$$

erit [a] ▭ sub AC & DB æquale ▭^lo sub CD & CB [b]. — a per 1 secundi. b per 2 secundi.

$$ax \quad \infty \quad bb + bx.$$

Rursus auferatur utrinque ▭ sub IC vel CB & BD, id est, bx,

eritque [c] ▭ sub AI & BD æquale □^to ex CB [d]. — c per 1 secundi. d per 3 secundi.

$$ax - bx \quad \infty \quad bb.$$

Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit [e] ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD. — e per 17 sexti.

$$a - b \;—\; b \;—\; b \,/\, x.$$ Quod erat propositum.

Quoniam autem præstare videtur, loco horum æqualium rectangulorum considerare laterum proportionem, quandoquidem in demonstrationibus Geometricis, ubi hæ æqualitates vel proportiones schematum contemplationi insuper sunt astringendæ, linearum hæc inter se collatio simplicior est censenda quàm planorum aut solidorum, ipsaq; etiam figuras requirit minùs intricatas, vel saltem ratiocinationes, quæ circa illas fiunt, magis liberas reddit: idcircò convertenda erit æqualitas in proportionem atque hæc eòusque continuanda varièq; transmutanda, utendo sc. ad id modis argumentandi libro 5^to Elementorum expositis, donec appareat quæsitum ex tribus prioribus proportionis terminis constare seu inveniri posse. Quod ipsum ut rectiùs percipiatur, visum nobis fuit aliam præcedentis Theorematis demonstrationem hîc afferre, qualis illa à principio usque ad finem per proportionalia procedit, & prioribus æqualitatibus ad amussim respondet.

Etenim cum ex hypothesi sit

▭ ADB æquale □^to ex CD:

$$ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx:$$

f per 17 sexti. Erit f, resolvendo æqualitatem in proportionem,

ut AD ad CD, ita CD ad BD.

$a+b+x$ —— $b+x$ —— $b+x$ / x.

Hinc cum sit

ut totum AD ad totum CD,

$a+b+x$ —— $b+x$

ita ablatum CD ad ablatum BD:

$b+x$ —— x

g per 19 quinti. erit etiam [g]

reliquum AC ad reliquum CB, ut ablatum CD ad ablatum BD.

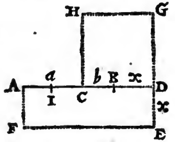
a —— b —— $b+x$ / x.

h per 17 quinti. Et dividendo [h]

ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD

$a-b$ —— b —— b / x. ut proponebatur.

Hinc, ut Problemati huic sit locus, patet, rectam AC ipsâ CB debere esse majorem; atque adeò hanc conditionem Problemati esse præfigendam, cum sine eâ constare nequeat, si velimus ut quæsitum ex datis inveniatur, utpote ad quod obtinendum BC ex CA est subtrahenda.



Idem etiam liquet, supponendo AC æqualem aut minorem quàm CB. Nam AC æquali existente ipsi CB, non posset rectangulum ADB quadrato ex CD æquale esse: cum illud [i] unà cum quadrato ex CB ei tantùm æquale existat. Et quidem si AC ipsâ CB minor sit, manifestum est, rectangulum ADB quadrato ex CD tunc adhuc multò minus fore.

i per 6 secundi.

Cum igitur constet Determinatio, Problema construetur hoc modo:

Constructio.

Assumptâ CI æquali CB, si fiat ut reliqua AI ad IC vel CB, ita CB ad BD: dico rectangulum ADEF, quod

quod ſub A D & DB ſeu D E comprehenditur, æquale eſſe quadrato CDGH, à recta CD deſcripto.

Quod ipſum retrogrado ordine fit manifeſtum, incipiendo ab Analyſeos fine & per ejuſdem veſtigia redeundo ad illius principium.

Finis *Compoſitionis*.

habebitur k

▭ ſub AD & DB ſeu ADEF æquale □to ex CD ſeu CDGH l.

$ax + bx + xx \infty bb + 2bx + xx.$

Quod erat faciendum.

Rurſus addito utrinque ▭lo ſub CD & DB, id eſt, $bx + xx$,

fiet m ▭ ſub AC & DB æquale ▭lo ſub CD & CB n.

$ax \infty bb + bx.$

Deinde addito utrinque ▭lo ſub IC vel CB & BD, id eſt, bx, ut in alteram tranſeat partem,

erit o ▭ ſub AI & BD æquale □to ex CB.

$ax - bx \infty bb.$

revocatâ proportione ad æqualitatem,

ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD:

$a - b$ —— b —— b / x

Etenim cum ex Conſtructione ſit

Principium *Compoſitionis*.

Alia ejuſdem Problematis Compoſitio, per veſtigia proportionalium ſecundæ Reſolutionis regrediens.

Finis *Compoſitionis*.

erit p ▭ ſub AD & BD ſeu ADEF æquale □to ex CD ſeu CDGH.

$ax + bx + xx \infty bb + 2bx + xx.$

Quod erat faciendum.

id eſt, revocatâ proportione ad æqualitatem,

NOTA. Hujus atque ſequentium Problematum Compoſitiones retro legendas eſſe.

k per 1 ſecundi.
l per 2 ſecundi.
m per 1 ſecundi.
n per 3 ſecundi.
o per 17 ſexti.
p per 17 ſexti.

 erit

q per 12 quinti.

erit etiam q

ut A D summa antec. ad C D summam conf., ita C D una antec. ad B D unam conseq.

$a+b+x$ ——— $b+x$ ——— $b+x$ ——— x

ita C D anteced. ad B D consequentem:

$b+x$ ——— x

Hinc cum sit ut A C antec. ad C B conseq.,

a ——— b

ut A C ad C B, ita C D ad B D.

a — b — $b+x$ / x.

r per 18 quinti.

erit componendo r

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D:

a — b — b — b / x

Cum enim ex constructione sit

Principium *Compositionis*

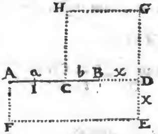
His igitur ita se habentibus, si velimus, ut, neglecto artificio, quo tum Constructio Problematis, tum ejus demonstratio fuit inventa, tantummodo constet, allatâ Constructione quæsitum semper obtineri: poterimus, calculi vestigiis nunc prætermissis, hujusmodi ad id afferre demonstrationem.

Demonstratio.

s per 17 sexti.

Cum enim ex constructione A I sit ad I C vel C B, sicut C B ad B D: erit s rectangulum sub extremis A I & B D æquale quadrato mediæ C B. Quibus si addatur commune rectangulum sub I C vel C B & B D, erit & t rectangulum sub A C & B D u æquale rectangulo sub C D & C B. His igitur si rursus addatur commune rectangulum sub C D & D B, erit similiter x rectangulum sub A D & D B seu A D E F y æquale quadrato ex C D. Quod erat faciendum.

t per 1 secundi.
u per 3 secundi.
x per 1 secundi.
y per 2 secundi.



Vel etiam sic:

Cum ex constructione AI sit ad IC vel CB, sicut CB ad BD: erit componendo [a] AC ad CB, sicut CD ad BD. Sed ut una antecedentium CD ad unam consequentium BD, ita sunt [b] antecedentes AC & CD simul, id est, tota AD, ad consequentes CB & BD simul, id est, ad totam CD. Æqualia igitur sunt [c] quadratum CD & rectangulum ADB. Quod erat faciendum.

[a] per 18 quinti. [b] per 19 quinti. [c] per 17 sexti.

Quoniam itaque Problemate ad æquationem perducto, Algebræ munus est eam deinde juxta certas regulas transmutare, servando semper æqualitatem, sic ut tandem constet, quo pacto illius ope quæsita quantitas ex datis inveniri possit: non inconveniens duxi, si unà hic ostenderem, quibus modis aliquot illius usitatiores transmutationes in proportiones resolvi queant, cum hæ, ut supra monitum fuit, in Problematis Geometricè resolvendis ac in Theorematis solito more demonstrandis, concinniores sint judicandæ; præsertim ubi eadem æqualitas ad tres pluresve dimensiones ascendit, atque idcirco illa cuique minùs obvia est, quâ ratione per Geometriæ Elementa sit explicanda.

Typus aliquot æquationum, secundùm Algebræ leges reductarum, & earundem in proportiones correspondentes resolutio; tam ad Problematum Resolutiones Geometricas ex calculo eliciendas, quàm ad Theorematum Demonstrationes ex eodem componendas, utilis.

Reductiones Algebraicæ	*Resolutiones Geometricæ.*	
Si fuerit $ax \infty bc$: dividatur utrinque per a fit $x \infty \frac{bc}{a}$.	erit [d] ut a ad b, ita c ad x. vel permutatim ut a ad c, ita b ad x.	[d] per 16 sexti.
Si sit $ax \pm bx \infty cd$: dividatur utrinque per $a \pm b$. fit $x \infty \frac{cd}{a \pm b}$.	erit [e] ut $a \pm b$ ad c, ita d ad x. vel permutatim ut $a \pm b$ ad d, ita c ad x.	[e] per 16 sexti.

Si

f per 16 sexti.

Si sit $a x \infty b c \sim d c$:
dividatur utrinque per a
fit $x \infty \frac{bc \sim dc}{a}$.

erit ^{f} ut a ad $b \sim d$, ita c ad x.
vel permutatim
ut a ad c, ita $b \sim d$ ad x.

g per 16 sexti.

Si sit $a x \sim b x \infty c d \sim e d$:
dividatur utrinque per $a \sim b$
fit $x \infty \frac{cd \sim ed}{a \sim b}$.

erit ^{g} ut $a \sim b$ ad $c \sim e$, ita d ad x.
vel permutatim
ut $a \sim b$ ad d, ita $c \sim e$ ad x.

h per 16 sexti.

Si sit $a x \infty bb - cc$:
dividatur utrinque per a
fit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$.

erit ^{h} ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x.
vel permutatim
ut a ad $b - c$, ita $b + c$ ad x.

i per 16 sexti.
* Ut supra ad notam †
k per 17 quinti.

Si sit $a x \infty bb + bx$: *
auferatur utrinque bx
eritque $a x - b x \infty bb$.
dividatur utrinque per $a - b$
fit $x \infty \frac{bb}{a - b}$.

erit ^{i} ut a ad b, ita $b + x$ ad x.
& dividendo ^{k}
ut $a - b$ ad b, ita b ad x.

l per 16 sexti.
m per 18 quinti.

Si sit $a x \infty bb - bx$:
addatur utrinque bx
eritque $ax + bx \infty bb$.
dividatur utrinque per $a + b$
fit $x \infty \frac{bb}{a + b}$.

erit ^{l} ut a ad b, ita $b - x$ ad x.
& componendo ^{m}
ut $a + b$ ad b, ita b ad x.

n per 16 sexti.
o per 17 quinti.
p vide Clavium ad 18 quinti.

Si sit $a x - a c \infty b x$:
addito utrinque ac
erit $a x \infty b x + a c$.
auferatur utrinque bx
eritque $a x - b x \infty a c$.
dividatur utrinque per $a - b$
fit $x \infty \frac{ac}{a - b}$.

erit ^{n} ut a ad b, ita x ad $x - c$.
& dividendo ^{o}
ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$.
& per compositionem rationis contrariam ^{p}
ut $a - b$ ad a, ita c ad x.

q per 16 sexti.
r per 17 quinti.

Si sit $a x - a c \infty b x + b c$:
addito utrinque ac
erit $a x \infty b x + b c + a c$.
auferatur utrinque bx
eritque $a x - b x \infty b c + a c$.

erit ^{q} ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$.
& dividendo ^{r}
ut $a - b$ ad b, ita $2c$ ad $x - c$.
Ubi liquet, etiamsi 4tus hic terminus proportionalis quantitatem

dividatur utrinque per $a-b$

fit $x \infty \frac{bc+ac}{a-b}$.

Si sit $ac+ax \infty bc-bx$:
addito utrinque bx
erit $ac+ax+bx \infty bc$.
auferatur utrinque ac
eritque $ax+bx \infty bc-ac$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $x \infty \frac{bc-ac}{a+b}$.

tem quæsitam x seorsim non exhibeat, ipsam tamen ex tribus prioribus, qui quidem omnes sunt cogniti, inveniri posse. Id quod similiter de præcedenti ac sequenti formula aliisque est intelligendum.

At verò si ipsa x quarto loco separatim desideretur, licebit ulterius sic argumentari.

[a] Haud secus, cum sit
ut a ad b, ita $x+c$ ad $x-c$,
erit invertendo [a] *a per Coroll. 4 quinti.*
ut b ad a, ita $x-c$ ad $x+c$.
& per compositionem rationis contrariam [b] *b vide Clavium ad 18 quinti.*
ut b ad $b+a$, ita $x-c$ ad $2x$.

Hinc cum $a-b$ —— b .... $b+a$
sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c$ —— $x-c$ .... $2x$

tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [c] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est, *c per 22 quinti.*

$a-b$ ad $b+a$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x.[d] *d per 15 quinti.*

erit [e] ut a ad b, ita $c-x$ ad $c+x$. [e] *e per 16 sexti.*
& componendo [f] *f per 18 quinti.*
ut $a+b$ ad b, ita $2c$ ad $c+x$.

Rursus cum sit
ut a ad b, ita $c-x$ ad $c+x$,
erit invertendo [g] *g per Coroll. 4 quinti.*
ut b ad a, ita $c+x$ ad $c-x$.
& per conversionem rationis [h] *h per Coroll. 19 quinti.*
ut b ad $b-a$, ita $c+x$ ad $2x$.

Hinc cum $a+b$ —— b ... $b-a$
sint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $c+x$ ... $2x$
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [i] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est,

i per 22 quinti.

$a+b$ ad $b-a$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x. [k]

k per 15 quinti
l per 16 sexti.
m per 17 quinti.

Si sit $ax + ac \infty bx - bc$:
addito utrinque bc
erit $ax + ac + bc \infty bx$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac + bc \infty bx - ax$.
dividatur utrinque per $b-a$
fit $\frac{ac+bc}{b-a} \infty x$.

erit [l] ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$. [m]
& dividendo [m]
ut $b-a$ ad a, ita $2c$ ad $x-c$.
Rursus cum sit
[n] ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$,
erit invertendo [n]
ut a ad b, ita $x-c$ ad $x+c$.
& per compositionem rationis contrariam [o]
ut a ad $a+b$, ita $x-c$ ad $2x$.

n per Coroll. 4 quinti.

o vide Clavium ad 18 quinti.

Hinc cum $b-a$ —— a ..... $a+b$
sint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $x-c$ ... $2x$,
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [p] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est,

p per 22 quinti.

$b-a$ ad $a+b$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x. [q]

q per 15 quinti.
r per 16 sexti.
s per 18 quinti.

Si sit $ac - ax \infty bx + bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty bx + ax + bc$.
auferatur utrinque bc
eritque $ac - bc \infty bx + ax$.
dividatur utrinque per $b+a$
fit $\frac{ac-bc}{b+a} \infty x$.

erit [r] ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$. [s]
& componendo [s]
ut $b+a$ ad a, ita $2c$ ad $x+c$.
Rursus cum sit
[t] ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$,
erit invertendo [t]
ut a ad b, ita $x+c$ ad $c-x$.
& per conversionem rationis [u]
ut a ad $a-b$, ita $x+c$ ad $2x$.

t per Coroll. 4 quinti.

u per Coroll. 19 quinti.

Hinc

Hinc cum $b+a$ —— a ..... $a-b$
sint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $x+c$ ..... $2x$
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [a] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est, $b+a$ ad $a-b$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x.[b]

a per 22 quinti.

b per 15 quinti.

Si sit $ax - ac \infty bc - bx$:
addito utrinque ac
erit $ax \infty bc + ac - bx$.
addatur utrinque bx
eritq; $ax + bx \infty bc + ac$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $x \infty c$.

erit [c] ut a ad b, ita $c-x$ ad $x-c$. Unde concluditur c esse ∞ x. Nam minor esse non potest, quoniam componendo [d] foret, ut $a+b$ ad b, ita o ad $x-c$. quod est absurdum. Similiter major esse nequit, quandoquidem per compositionem rationis contrariam [e] foret ut a ad $a+b$, ita $c-x$ ad o. quod perinde absurdum est. Nec aliter se res habet in sequenti formula.

c per 16 sexti.

d per 18 quinti.

e vide Clavium ad 18 quinti.

Si sit $ac - ax \infty bx - bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty ax + bx - bc$.
addatur utrinque bc
eritq; $ac + bc \infty ax + bx$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $c \infty x$.

erit [f] ut a ad b, ita $x-c$ ad $c-x$. Unde rursus ut ante concluditur c esse ∞ x: cum nec major nec minor esse possit.

f per 16 sexti.

Cum igitur in resolvendo Problemate appareat, supponendo illud ipsum ut jam factum, quo pacto quis argumentari possit, ut id quod in eo quæritur ex datis inveniat: ritè me facturum judicavi, si ulteriùs hîc ostenderem, quâ ratione præcedentium reductionum vestigiis insistendo per illa eadem retrogradi liceat, ad æquationes propositas, quas ipsius Problematis conditiones adimplere suppono, Geometricè componendas.

Typus vestigiorum, juxta quæ æquationes superiùs reductæ ac resolutæ rursus componuntur, initium faciendo à fine reductionis & per eadem vestigia regrediendo; ad Compositiones Geometricas ex calculo eruendas utilis.

Compositiones Algebraicæ	*Compositiones Geometricæ.*
a per 16. sexti. fit $ax \infty bc$.	erit [a] $ax \infty bc$.
multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si fuerit $x \infty \frac{bc}{a}$: h. e., si sit ut a ad b, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita b ad x:

b per 16 sexti. fit $ax \pm bx \infty cd$.	erit [b] $ax \pm bx \infty cd$.
multiplicetur utrinque per $a \pm b$	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{cd}{a \pm b}$: h. e., si sit ut $a \pm b$ ad c, ita d ad x; vel permutatim $a \pm b$ ad d, ita c ad x:

c per 16 sexti. fit $ax \infty bc \pm dc$.	erit [c] $ax \infty bc \pm dc$.
multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{bc \pm dc}{a}$: h. e., si sit ut a ad $b \pm d$, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita $b \pm d$ ad x:

d per 16 sexti. fit $ax \pm bx \infty cd \pm ed$	erit [d] $ax \pm bx \infty cd \pm ed$.
multiplicetur per $a \pm b$	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{cd \pm ed}{a \pm b}$: h. e., si sit ut $a \pm b$ ad $c \pm e$, ita d ad x; vel permutatim $a \pm b$ ad d, ita $c \pm e$ ad x:

e per 16 sexti. fit $ax \infty bb - cc$.	erit [e] $ax \infty bb - cc$.
multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$: h. e., si sit ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x; vel permutatim a ad $b - c$, ita $b + x$ ad x:

fit

fit $ax \infty bb + bx$.	erit [f] $ax \infty bb + bx$.	f per 16 sexti.
addatur utrinque bx.	id est, reducendo proportionem ad æqualitatem	
eritque $ax - bx \infty bb$.	ut a ad b, ita $b + x$ ad x.	
multiplicetur utrinq; per $a - b$	erit componendo [g]	g per 18 quinti
Si fit $x \infty \frac{bb}{a-b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad b, ita b ad x: †		Ut supra ad notam †
fit $ax \infty bb - bx$.	erit [h] $ax \infty bb - bx$.	h per 16 sexti.
auferatur utrinque bx	id est, reducendo proportionem ad æqualitatem	
eritque $ax + bx \infty bb$.	ut a ad b, ita $b - x$ ad x.	
multiplicetur utrinq; per $a + b$	erit dividendo [i]	i per 17 quinti.
Si fit $x \infty \frac{bb}{a+b}$: hoc est, si sit ut $a + b$ ad b, ita b ad x:		
fit $ax - ac \infty bx$.	erit [k] $ax - ac \infty bx$.	k per 16 sexti.
auferatur utrinque ac	id est, reducendo proportionem ad æqualitatem	
eritque $ax \infty bx + ac$.	ut a ad b, ita x ad $x - c$.	
addatur utrinque bx	& componendo [l]	l per 18 quinti.
erit $ax - bx \infty ac$.	ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$.	
multiplicato utrinq; per $a - b$	erit per divisionem rationis contrariam [m]	m vide Clavium ad 17 quinti.
Si fit $x \infty \frac{ac}{a-b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad a, ita c ad x:		
	erit [n] $ax - ac \infty bx + bc$.	n per 16 sexti.
	id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,	
	ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$	
	& componendo [o]	o per 18 quinti.
	ut $a - b$ ad b, ita $2c$ ad $x - c$.	
fit $ax - ac \infty bx + bc$.	vel, sumptis consequentium semissibus, [p]	p vide Clavium ad 22 quinti.
auferatur utrinque ac.	ut $a - b$ ad $\frac{1}{2}b$, ita $2c$ ad $2x - 2c$.	
eritque $ax \infty bx + bc + ac$.	id est, per divisionem rationis contrariam, [q]	q vide Clavium ad 17 quinti.
addatur utrinque bx		
erit $ax - bx \infty bc + ac$.		

 mul-

multiplicato utrinq; per $a - b$ ut $a - b$ ad $b + a$, ita $2c$ ad $2x$. erit etiam r

r per 15 quinti.

Si sit $x \propto \frac{bc + ac}{a - b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad $b + a$, ita c ad x:

s per 16 sexti

erit s $ac + ax \propto bc - bx$. id est, reducendo proportionem ad æqualitatem, ut a ad b, ita $c - x$ ad $c + x$.

t per 17 quinti.

& dividendo t ut $a + b$ ad b, ita $2c$ ad $c + x$. vel, sumptis consequentium semissibus, u ut $a + b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2c + 2x$. id est, per compositionem rationis contrariam, x ut $a + b$ ad $b - a$, ita $2c$ ad $2x$. erit etiam y

u vide Clavium ad 22 quinti.

x vide Clavium ad 18 quinti.

y per 15 quinti.

fit $ac + ax \propto bc - bx$.
auferatur utrinque bx
eritque $ac + ax + bx \propto bc$.
addatur utrinque ac
erit $ax + bx \propto bc - ac$.
multiplicato utrinq; per $a + b$

Si sit $x \propto \frac{bc - ac}{a + b}$: hoc est, si sit ut $a + b$ ad $b - a$, ita c ad x:

z per 16 sexti.

erit z $ax + ac \propto bx - bc$. id est, reducendo proportionem ad æqualitatem, ut b ad a, ita $x + c$ ad $x - c$.

a per 18 quinti.

& componendo a ut $b - a$ ad a, ita $2c$ ad $x - c$. vel, sumptis consequentium semissibus, b ut $b - a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x - 2c$. id est, per divisionem rationis contrariam, c ut $b - a$ ad $a + b$, ita $2c$ ad $2x$. erit etiam d

b vide Clavium ad 22 quinti.

c vide Clavium ad 17 quinti.

d per 15 quinti.

fit $ax + ac \propto bx - bc$.
auferatur utrinque bc
eritque $ax + ac + bc \propto bx$.
addatur utrinque ax
erit $ac + bc \propto bx - ax$.
multiplicato utrinq; per $b - a$

Si sit $\frac{ac + bc}{b - a} \propto x$: hoc est, si sit ut $b - a$ ad $a + b$, ita c ad x:

erit [e] $ac - ax \infty bx + bc$. — e per 16 sexti.

id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,

ut b ad a, ita $c - x$ ad $x + c$.

& dividendo [f] — f per 17 quinti.

ut $b + a$ ad a, ita $2c$ ad $x + c$.

vel, sumptis consequentium semissibus, [g] — g vide Clavium ad 22 quinti.

ut $b + a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x + 2c$.

id est, per compositionem rationis contrariam, [h] — h vide Clavium ad 18 quinti.

ut $b + a$ ad $a - b$, ita $2c$ ad $2x$.

erit etiam [i] — i per 15 quinti.

fit $ac - ax \infty bx + bc$.

auferatur utrinque ax

eritque $ac \infty bx + ax + bc$.

addatur utrinque bc

erit $ac - bc \infty bx + ax$.

multiplicato utrinq; per $b + a$

Si fit $\frac{ac - bc}{b + a} \infty x$: hoc est, si fit ut $b + a$ ad $a - b$, ita c ad x:

fit $ax - ac \infty bc - bx$.

auferatur utrinque ac

eritque $ax \infty bc + ac - bx$.

auferatur utrinque bx

erit $ax + bx \infty bc + ac$.

multiplicato utrinque per $a + b$

Si fit $x \infty c$: seu, quod idem est, si x fit ad c, sicut $a + b$ ad $a + b$:

fit $ac - ax \infty bx - bc$.

auferatur utrinque ax

eritque $ac \infty ax + bx - bc$.

auferatur utrinque bc

erit $ac + bc \infty ax + bx$.

multiplicato utrinque per $a + b$

Si fit $c \infty x$: seu, quod idem est, si c fit ad x, sicut $a + b$ ad $a + b$:

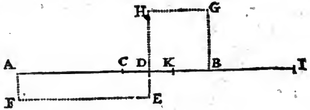
Cum in duabus præcedentibus formulis non occurrat quâ viâ per proportionales, ut ante, ad æquationes priores perveniatur: licebit per æqualitatem procedere, æqualia per æqualia multiplicando, ac deinde ab æqualibus æqualia auferendo, omnino ut in Compositionibus hisce Algebraicis factum est.

PROBLEMA.

Datam rectam A B, utcunque sectam in C, rursus secare in D; ita ut rectangulum sub A D, D C comprehensum sit æquale quadrato ex D B.

Series *Analyseos* sive *Resolutionis*.

Supposito Problemate ut jam facto,
voco A C. a
C B. b
& C D. x; eritque A D $\infty\ a + x$, & D B $\infty\ b - x$.



Deinde ut habeatur æquatio,
Multiplico A D. $a + x$
per D C seu D E. x
Et fit rectangulum A D E F. $ax + xx$.
Similiter multiplico D B. $b - x$
per D B seu B G. $b - x$
$- bx + xx$
$bb - bx$
Et fit quadratum D B G H. $bb - 2bx + xx$.
Unde talis exurgit æquatio
$ax + xx \infty bb - 2bx + xx$.
Ad quam reducendam tollatur utrinque xx,
eritque $ax \infty bb - 2bx$.

Deinde transferatur $2bx$ ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur, & cognitæ ab altera parte,
& fit $ax + 2bx \infty bb$.

Cujus

Cujus utraque pars si dividatur per $a + 2b$,

invenietur $x \infty \frac{bb}{a + 2b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a + 2b$ ad b, ita b ad x.

Id quod docet, ad secandam AB in D, qualis requiritur, producendam esse AB ad I, ita ut BI sit æqualis BC; ac deinde ad AI & IB vel BC inveniendam esse 3tiam proportionalem, hoc est, ut AI sit ad IB vel BC, sicut BC ad CD.

Ut autem pateat demonstratio, repetantur Analyseos vestigia. Si enim per hæc ipsa regrediamur, incipiendo ab ejus fine & desinendo ubi illa initium sumpsit, inventa simul erit via à dato seu concesso perveniendi ad quæsitum. In quem igitur finem binas sequentes compositiones, quarum altera Algebræ, altera Geometriæ genuina est, ob oculos ponere visum fuit, adhibitâ utriusque calculi interpretatione sive ad figuram relatione.

Compositio Algebraica. *Compositio Geometrica.*

Finis *Compositionis.*

Compositio Algebraica:

▭ AD, CD vel ADEF

a

& fit $ax + xx \infty$

□ DB vel DBGH.

b

$bb - 2bx + xx$.

□ CD vel DK

Addatur utrinque xx,

▭ AC, CD

eritque c $ax \infty$

(□ DB − □ CD vel DK) i. e. d,

d ▭ CBK

$bb - 2bx$.

▭ CI, CD vel e ▭ CDI + □ CD

Auferatur utrinque $2bx$

▭ AI, CD □ IB vel BC

erit f $ax + 2bx \infty bb$.

Compositio Geometrica:

▭ AD, CD vel ADEF

Et fit, *per 3. 2di,* $ax + xx \infty$

□ DB vel DBGH.

$bb - 2bx + xx$. *per 6. 2di.*

□ CD vel DK

Addatur utrinque xx

▭ ACD ▭ CBK

erit, *per 16. 6ti,* $ax \infty bb - 2bx$.

Id est, reductâ proportione ad æqualitatem,

AC CB BK KD vel CD

ut a ad b, ita $b - 2x$ ad x.

Et, sumptis consequentium semissibus, *vide Clavium ad 22. 5ti.*

AC CI BK KC

ut a ad $2b$, ita $b - 2x$ ad $2x$.

Unde dividendo erit, *per 17 quinti.*

AI IC BC 2CD vel CK

ut $a + 2b$ ad $2b$, ita b ad $2x$.

a *per 3 secundi.*
b *per 6 secundi.*
c *per 5 secundi.*
d *per 1 secundi.*
e *per 3 secundi.*
f *per 17 sexti.*

id est, reductâ proportione ad æqualitatem, sive, sumptis consequentium duplis, *vide Clavium ad 22. 5ti.*

AI IB BC CD

Ex constructione est, ut $a+2b$ ad b, ita b ad x.

Principium *Compositionis.*

Adapertâ itaque tum ad Constructionem tum ad Demonstrationem viâ, licebit Problema construere atque dupliciter demonstrare, ut sequitur.

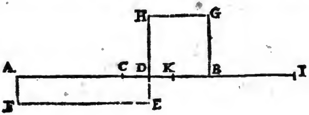
Constructio.

Productâ AB ad I, donec BI sit æqualis BC, fiat ut AI ad IB vel BC, ita BC ad CD: dico rectangulum ADC seu ADEF quadrato DB seu DBGH æquale esse.

Demonstratio.

Cum enim ex constructione AI sit ad IB vel BC, ut BC ad CD: erit [g] rectangulum sub extremis AI, CD, id est, [h] rectangulum sub AC, CD unà cum rectangulo sub CI, CD, æquale quadrato mediæ IB vel BC. A quibus si commune aufe-

g per 17 sexti. h per 1 secundi.



ratur rectangulum sub CI, CD: erit reliquum rectangulum sub AC, CD æquale BC quadrato, dempto eidem rectangulo sub CI, CD, id est, [i] rectangulo CDI unà cum quadrato CD. At cum dempto CDI rectangulo à quadrato CB vel BI [k] relinquatur quadratum DB: patet dictum rectangulum ACD quadrato DB æquale esse minus quadrato CD. Hinc cum, sumendo

i per 3 secundi. k per 5 secundi.

mendo CD & DK æquales, quadratum DB minus quadrato CD vel DK [l] æquale sit rectangulo CBK: manifestum est, si æqualibus hisce rectangulis ACD & CBK addatur commune quadratum CD vel DK, etiam totum toti æquale esse, id est, [m] rectangulum ADC seu ADEF ipsi DB quadrato seu DBGH. Quod erat faciendum.

l per 6 secundi.
m per 3 secundi.

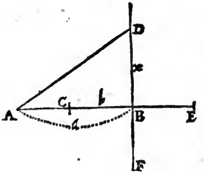
Vel sic:

Cum ex constructione sit ut AI ad IB, ita BC ad CD: erit quoque, sumptis consequentium duplis, [n] ut AI ad IC, ita BC ad 2CD seu CK; & dividendo [o] ut AC ad CI, ita BK ad KC; id est, sumptis consequentium semissibus, [p] ut AC ad CB, ita BK ad KD vel CD. Æquale igitur est [q] rectangulum sub extremis AC, CD rectangulo sub mediis CB, BK. Quibus si addatur commune quadratum CD vel DK, erit & totum toti æquale; id est, [r] rectangulum ADC seu ADEF ipsi quadrato DB seu DBGH [s]. Quod erat faciendum.

n vide Clavium ad 22 quinti.
o per 17 quinti.
p vide Clavium ad 22 quinti.
q per 16 sexti.
r per 3 secundi.
s per 6 secundi.

PROBLEMA.

Datâ rectâ AB utcunque sectâ in C, erectâque ex ejus termino B super ipsa perpendiculari indefinitâ BD; ex altero ejus termino A rectam lineam ducere AD, huic occurrentem in D; ita ut ipsa æqualis sit rectis DB, BC simul sumptis.



Series *Analyseos*:

Ponatur factum quod quæritur,
sitque $AB \propto a$
$CB \propto b$
& $BD \propto x$: eritque
$AD \propto b + x$.

Hinc cum angulus ad B sit rectus, erit [a] quadratum ex AD æquale binis quadratis ex AB & BD.

a per 47 primi.

 Unde

Unde talis resultat æquatio

□AD □AB + □BD

$bb + 2bx + xx \infty aa + xx.$

Ad quam reducendam, tollatur utrinque xx,

eritque $bb + 2bx \infty aa$.

Deinde transferatur bb ad alteram partem, ut incognita quantitas ab una parte habeatur & reliquæ ab altera parte,

& fit $2bx \infty aa - bb$.

Cujus utraque pars si dividatur per $2b$,

obtinebitur $x \infty \frac{aa - bb}{2b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $2b$ ad $a + b$, ita $a - b$ ad x.

Quod ipsum docet, ad Problema hoc solvendum, prout BE in directum ipsius AB sumpta est æqualis BC, opùs tantùm esse, ad CE, AE, & AC invenire 4tam proportionalem BD.

Ad inveniendam autem demonstrationem, fiat repetitio vestigiorum Analyseos, incipiendo ab ejus fine & per eadem vestigia progrediendo usque ad ipsius initium; ita videlicet, ut quod in Analysi seu Resolutione addendum præcipitur, id in Synthesi seu Compositione subtrahatur, & contra: cum Analysis & Synthesis directè omnino sibi invicem opponantur.

Finis *Compositionis.*

Unde & ipsæ rectæ FD & AD.

Æqualia igitur sunt □FD & □AD.

b per 47 primi. □FB + 2▭FBD + □BD, vel □FD[b]. □AB + □BD, vel □AD[c].

c per 4 secundi. Et fit $bb + 2bx + xx \infty aa + xx$.

□BD

Rursus addatur utrinque xx,

d per 6 secundi. □FB + 2▭FBD □AB[d].

eritque $bb + 2bx \infty aa$.

□FB vel BC

Addatur utrinque bb,

▭CE, BD seu 2▭FBD ▭EAC.

e per 16 sexti. erit[e] $2bx \infty aa - bb$.

id est,

id est, reductâ proportione ad æqualitatem, sumptâque FB æquali BC,

CE AE AC BD

Ex constructione est ut $2b$ ad $a+b$, ita $a-b$ ad x.

Principium *Compositionis*.

Inventâ igitur tum Constructione tum Compositione sive Demonstratione, poterit Problema, neglecto jam artificio, quo utraque fuit investigata, in hunc modum construi atque componi.

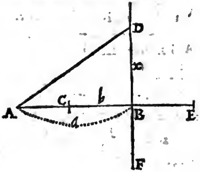
Constructio.

Productâ AB ad E, ut BE sit æqualis BC: fiat ut CE ad AE, ita AC ad BD, jungaturque AD. Dico hanc ipsis DB, BC simul sumptis æqualem esse.

Demonstratio.

Etenim productâ DB ad F, ita ut BF sit æqualis BC, quoniam per constructionem CE est ad AE, sicut AC ad BD: erit f rectangulum sub extremis CE, BD, id est, duplum rectangulum FBD, æquale rectangulo sub mediis EA, AC. Quibus si addatur commune quadratum ex FB vel BC, erit etiam quadratum FB unà cum duplo rectangulo FBD

f per 16 sexti.

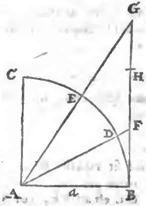


æquale quadrato ex AB g. Quibus si rursus addatur commune quadratum ex BD: erunt quoque bina quadrata ex FB, BD simul cum duplo rectangulo FBD, id est h, quadratum totius FD, æqualia binis quadratis ex AB, BD, id est i, æquale quadrato ex AD. Unde & ipsæ rectæ FD & AD æquales erunt. Hinc cum FD æqualis sit ipsis DB, BC simul sumptis, erit etiam AD ipsis DB, BC simul sumptis æqualis. Quod erat faciendum.

g per 6 secundi. h per 4 secundi. i per 47 primi.

THEOREMA.

Si in quadrante circuli ABC sumatur arcus quilibet BD minor quàm 45 gr. cujus duplus sit BE, eorumque tangentes BF, BG: erit ut quadratum radii AB minus quadrato BF ad duplum quadrati AB, ita BF ad BG.



Series *Analyseos*.

Esto $AB \infty a$
$BF \infty x$
$BG \infty y$, eritque $FG \infty y - x$
& $AG \infty z$.

Quoniam itaque arcus BE ipsius BD duplus ponitur, ac proinde angulus BAG duplus anguli BAF: erit angulus ad A in triangulo ABG recta AF bifariam sectus.

a per 3 sexti. Unde *a* erit ut FG ad BF, ita AG ad AB

$y - x \quad x \quad z \quad a$.

b per 16. sexti. Ideoque *b* $\square$ BF, AG æquale $\square$lo FG, AB

$xz \infty ay - ax$.

div. utrinque per x fit $z \infty \frac{ay - ax}{x}$.

Hinc ductâ utrâque parte in se quadratè,

add. $\square$ AB. aa / $\square$ BG yy $\square$ AG, per 47 primi.

erit $zz \infty \frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{xx} \infty aa + yy \infty zz$.

mult. utrinq; per xx: $aayy - 2aaxy + aaxx \infty aaxx + xxyy$

toll. utrinq; $aaxx$: $aayy - 2aaxy \infty xxyy$

div. utrinque per y: $aay - 2aax \infty xxy$

add. utrinque $2aax$: $aay \infty 2aax + xxy$

toll. utrinque xxy: $aay - xxy \infty 2aax$

div. utrinque per $aa - xx$: fit $y \infty \frac{2aax}{aa - xx}$.

$\square$AB$-\square$BF $2\square$AB BF BG

Hoc est, erit ut $aa - xx$ ad $2aa$, ita x ad y. Ut proponebatur.

De-

Demonstrationis series eodem modo se habet quo Analyseos, cum utriusque vestigia consentiant, quibus ab hypothesi ad quæsiti conclusionem perducimur. Uti hic videre est.

Etenim cum [c] sit — c per 3 sexti.

ut FG ad BF, ita AG ad AB:

$y - x \text{ —— } x \text{ —— } z \; / \; a$

erit quoque [d] — d per 16 sexti.

ut □ FG ad □ BF, ita □ AG seu □ AB + □ BG ad □ AB

$yy - 2xy + xx \text{ —— } xx \text{ —— } zz$, id est, $aa + yy \; / \; aa$.

& dividendo [e] — e per 17 quinti.

ut □ FG — □ BF vel FH,

id est, ▭ BGH [f] ad □ BF, ita □ BG ad □ AB — f per 6 secundi.

$yy - 2xy \text{ —— } xx \text{ —— } yy \; / \; aa$.

permutandoque [g] — g per 16 quinti.

ut ▭ BGH ad □ BG, vel [h] ut HG ad GB, ita □ BF ad □ AB — h per 1 sexti

$y - 2x \text{ —— } y \text{ —— } xx \; / \; aa$.

Id est, invertendo & per conversionem rationis [i], — i per Cor. 4 quinti, & per Corell. 19 quinti.

ut □ AB ad □ AB — □ BF, ita GB ad BH

$aa \text{ —— } aa - xx \text{ —— } y \; / \; 2x$.

& duplatis antecedentibus [k] convertendoque — k vide Clavium ad. 22 quinti.

ut □ AB — □ BF ad 2 □ AB, ita BH ad 2 GB seu BF ad BG [l] — l per 15 quinti.

$aa - xx \text{ —— } 2aa \text{ —— } x \; / \; y$.

Quod erat ostendendum.

Quòd si autem Algebræ ignaris sive in inveniendi arte imperitis ipsa demonstratio sit exhibenda, poterit ea prætermissis jam hisce vestigiis sic adhiberi.

Sumatur FH æqualis FB. Cum igitur in triangulo ABG angulus ad A rectâ AF bifariam sectus sit, erit [m] ut FG ad BF, ita AG ad AB. Sed cum linearum proportionalium etiam proportionalia sint quadrata, erit & [n] ut quadratum FG ad quadratum BF, ita quadratum AG, id est, *per 47 primi*, summa quadratorum AB, BG, ad quadratum AB. Et dividendo [o] ut quadratum FG minus quadrato BF vel FH, id est [p] rectangulum BGH, ad quadratum BF, ita quadratum BG ad quadratum AB; permutandoque [q] ut rectangulum BGH ad quadratum BG seu [r] ut HG ad GB, ita quadratum BF ad quadratum AB. Hoc est, in-

m per 3 sexti. n per 22 sexti. o per 17 quinti. p per 6 secundi. q per 16 quinti. r per 1 sexti.

[s per Coroll. 4 quinti, & per Cor. 19. quinti.] invertendo & per conversionem rationis [s], ut quadratum AB ad quadratum AB minus quadrato BF, ita GB ad BH; & duplatis antecedentibus [t vide Clavium ad 12 quinti.] convertendoque, ut quadratum AB minus quadrato BF ad duplum quadrati AB, ita BH ad duplum ipsius GB seu [u per 15 quinti.] BF ad BG. Quod erat demonstrandum.

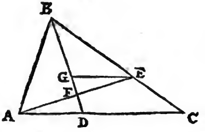
Hinc

„ Si, *Tangens cujuslibet arcûs minoris quàm 45 gr. ducatur* „ *in duplum Quadratum Radii; à Quadrato Radii auferatur* „ *Tangentis quadratum; Illud productum dividatur per hoc re-* „ *siduum: Quotus erit Tangens arcûs dupli.*

Theorema hoc à Clarissimo viro D. Joanne Pellio excogitatum atque ingeniosè adhibitum pluribus modis demonstratum reperitur in tractatu ejus de controversiis, circa veram circuli mensuram, inter ipsum & Clar. virum D. Christianum Severini Longomontanum ortis, ac anno 1647 in lucem editis.

THEOREMA.

Si fuerit triangulum ABC, cujus angulus ad B rectâ BD bifariam sit divisus, & ex BC abscindatur BE æqualis AB; jungaturque AE, secans BD in F: dico, si agatur EG parallela AC, occurrens ipsi BD in G, esse ut BG ad BD, ita AD ad DC, & AB ad BC; nec non DC bis esse ad excessum, quo DC superat AD, sicut BD ad DF.



Series *Analyseos.*

Esto BD ∞ *b*
AD ∞ *c*
DC ∞ *y*
& DF ∞ *z*.

Quonian itaque triangulorum ABF, EBF anguli ad B ex hypothesi sunt æquales, nec non latera AB, BF & EB, BF, quæ ipsos comprehendunt, æqualia: erunt & [a per 4 primi.] anguli ad F æquales, id est recti, basis-

basisque AF basi FE æqualis. Porrò cum [b] propter parallelas AC, GE anguli DAF, FEG in triangulis AFD, FGE æquales sint, ut & [c] anguli ad verticem AFD & GFE, latusque AF lateri FE, ut ostensum est: erunt quoque [d] reliqua latera AD, DF reliquis lateribus EG, GF æqualia. Hinc cùm [e] propter similitudinem triangulorum BGE, BDC, BG sit ad GE, id est, AD, sicut BD ad DC; nec non BG ad BE, id est AB, sicut BD ad BC: erit quoque [f] permutando BG ad BD, sicut AD ad DC, & AB ad BC. Quod est primum.

b per 29 primi.
c per 15 primi.
d per 26 primi.
e per Cor. 4 quinti.
f per 16 quinti.

Cæterùm DC bis esse ad excessum, quo DC superat AD, sicut BD ad DF: ita patet.

Est enim, ut BG ad BD, ita AD ad DC

$b - 2z \quad b \quad c \,/\, y.$

Ideoque [g] ▭ BG, DC ꝏ ▭lo BD, AD. — g per 16 sexti.

$by - 2yz \;\infty\; bc.$

add. utrinque $2yz$

$by \;\infty\; 2yz + bc$

toll. utrinque bc

$by - bc \;\infty\; 2yz$

div. utrinque per $2y$

fit $\frac{by - bc}{2y} \;\infty\; z.$ Hoc est, erit ut

2DC DC—AD BD DF

$2y$ ad $y - c$, ita b ad z. Quod est secundum.

Vel etiam, hoc modo:

Etenim cum sit

ut BG ad BD, ita AD ad DC

$b - 2z \quad b \quad c \,/\, y,$

erit invertendo [h] — h per Cor. 4. quinti.

ut DC ad AD, ita BD ad BG

$y \quad c \quad b \,/\, b - 2z.$

& per conversionem rationis [i] — i per Cor. 19. quinti.

ut DC ad DC—AD, ita BD ad DG

$y \quad y - c \quad b \,/\, 2z.$

id est, duplatis antecedentibus, [k] — k vide Clavium ad 28 quinti.

ut 2DC ad DC—AD, ita 2BD ad DG seu BD ad DF

$2y \quad y - c \quad b \,/\, z.$

Ex his facile est, cognitis AD, DB, & DC, invenire DF. Si enim, exempli gratiâ, AD sit 39, DB 45, & DC 325: fiat ut 2DC 650 ad DC — AD 286, ita DB 45, ad DF $19\frac{4}{5}$.

THEOREMA.

Iisdem positis, dico rectangulum ADC unà cum quadrato DB æquale esse rectangulo ABC.

Series *Analyseos*.

Esto AB $\infty\ a$
BD $\infty\ b$
AD $\infty\ c$
BC $\infty\ x$
DC $\infty\ y$
& DF $\infty\ z$.

Etenim cum à 2 ▭BDF sit ∞ □AD + □DB — □AB; id est, $2bz \infty cc + bb - aa$: *2 per 13 secundi.*

erit, dividendo utrinque per $2b$, $z \infty \frac{cc+bb-aa}{2b}$.

Unde cum per antec. Theorema inventum quoq; sit $\frac{by-bc}{2y} \infty z$:

erit $\frac{cc+bb-aa}{b} \infty \frac{by-bc}{y}$.

diviso utroque denominatore per 2, instituatur multiplicatio per crucem: $ccy + bby - aay \infty bby - bbc$

add. utrinque aay: $ccy + bby \infty aay + bby - bbc$

toll. utrinque bby: $ccy \infty aay - bbc$

add. utrinque bbc: $ccy + bbc \infty aay$

loco ay substit. cx: $ccy + bbc \infty acx$

div. utrinque per c: ▭ADC + □DB ▭ABC

Ex demonstratis in antec. Theoremate vel *3tia Sexti* est ut AD ad DC, ita AB ad BC
c —— y —— a / x,
ac proinde *per 16 sexti*.
▭AD, BC ∞ ▭AB, DC
$cx \infty ay$.

Et sit $cy + bb \infty ax$. Quod erat propositum.

Quo autem pacto in adæquatione hac resolvenda argumentandum sit, ut sequendo vestigia allatæ reductionis, quæ ob superiorem multiplicationem per crucem propriè Algebraica est,

quæ-

quæsitum Theorematis Geometricè concludatur, sequens terminorum dispositio docebit.

Ex præcedenti Theoremate est

ut 2 DC ad DC—AD, ita BD ad DF
$2y$ — $y-c$ — b / z.

ac proinde [b] 2 ▭ CDF æqual. ▭ BDC — ▭ ADB b per 16 sexti.
$2yz \;\infty\; by-bc.$

Deinde [c] est, ut BD ad DC, ita 2 ▭ BDF ad 2 ▭ CDF. as- c per 1 sexti.
b — y — $2bz$ / $2yz$.
sumptâ sc. com. alt. 2 DF, id est, 2 z.

Hinc cum [d] d per 13 secundi.

2 ▭ BDF æqu. □ AD + □ DB — □ AB, & [a] 2 ▭ CDF æqu. ▭ BDC — ▭ ADB:
$2bz \;\infty\; cc+bb-aa$, & $2yz \;\infty\; by-bc$:

erit ut BD ad DC, seu [e] □ BD ad ▭ BDC, e assumptâ com. altit. BD, id est, b.
bb — by.

ita □ AD + □ DB — □ AB ad ▭ BDC — ▭ ADB.
$cc+bb-aa$ — $by-bc$

ideoque [f] f per 19 quinti.

& reliq. □ AB — □ AD ad rel. ▭ ADB, ut totum ad totum seu BD ad DC.
$aa-cc$ — bc — b / y.

Facile hic esset quæsitum Propositionis concludere, revocando hanc proportionem ad æqualitatem, ac deinde in locum a y substituendo c x. Sed quoniam sic ad solida ascenditur, de quibus in posterioribus Elementorum libris agitur, qui ob difficultatem suam magis præteriri quàm pro Elementis Geometriæ addisci solent, poterimus iisdem sepositis in quæsiti conclusionem sic ulteriùs argumentari.

Sed ut BD est ad DC, ita quoque est [g] ▭ ADB ad ▭ ADC; g assumptâ com. altit. AD seu c.
b — y — bc / cy;

& ut BD ad AD, ita quoque est [h] ▭ ADB ad □ AD; & [i], h assumptâ com. altit. AD seu c.
b — c — bc / cc

□ BD ad ▭ ADB seu bb ad bc. i assumptâ com. altit. BD seu b.

Erunt itaque □AB—□AD, ▭ADB, & □AD tres magnitudines

$aa - cc$ —— bc ...... cc ab una parte;

& □BD, ▭ADB, & ▭ADC tres aliæ ab altera

bb ...... bc —— cy parte, quæ binæ sumptæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est perturbata:

k per 23 quinti.

quare etiam *k* ex æqualitate proportionales erunt, id est, □AB—□AD ad □AD, sicut □BD ad ▭ADC.

$aa - cc$ —— cc —— bb / cy.

l per 18 quinti.

Et componendo *l*.

□AB ad □AD, sicut □BD+▭ADC ad ▭ADC

aa —— cc —— $bb+cy$ / cy.

m per 16 quinti.

Permutandoque *m*

□AB ad □BD+▭ADC, sicut □AD ad ▭ADC seu

aa —— $bb+cy$ —— cc / cy.

n per 1 sexti, relictâ sec. com. altit. AD seu c.

AD ad DC, id est, *c* ad *y*. *n*

o per antec. Theorema vel 3 sexti.

Sed ut AD ad DC, ita *o* est quoque AB ad BC, seu *p*, □AB

c —— y —— a / x.

p assumptâ com. altit. AB seu a.

ad ▭ABC, id est, aa ad ax.

Unde erit ut □AB ad □BD+▭ADC, ita □AB ad ▭ABC.

aa —— $bb+cy$ —— aa / ax.

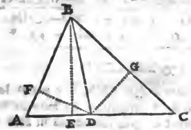
q per 9 quinti.

Æqualia igitur sunt *q* □BD+▭ADC & ▭ABC.

$bb+cy$ ∞ ax. Quod erat ostendendum.

Idem quoque aliter à nobis demonstratum reperitur Prop^ne^ 20^mâ^ secundæ partis prioris tractatûs Exercitationum nostrarum Mathematicarum; ac præterea etiam adhuc aliter ab aliis.

Alia præcedentis Theorematis Analysis, supponendo tantum 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis.



Demissis ex D super A B, B C, perpendicularibus D F, D G, patet, ob angulum A B C rectâ B D bifariam divisum, ipsas D F & D G, ut & F B & B G *per 26 primi* esse æquales. Deinde esto etiam B E perpendicularis ad A C, sitque

A B ∞ *a*
B D ∞ *b*
A D ∞ *c*
B C ∞ *x*
D C ∞ *y*
F B vel B G ∞ *t*, eritque A F ∞ *a* — *t*,
& G C ∞ *x* — *t*.
& E D ∞ *v*, eritque A E ∞ *c* — *v*,
& E C ∞ *y* + *v*.

per 47 primi.

Subtr. { □ AD. *cc* ; □ A F. *aa* — 2*at* + *tt* } Subtr. { *bb*. □ B D ; *tt*. □ F B }

□ F D. *cc* — *aa* + 2*at* — *tt* ∞ *bb* — *tt*. □ F D

del. utrinque *tt*, & transf. *cc* & *aa*

2 ▭ ABF □ AB + □ BD — □ AD
2*at* ∞ *aa* + *bb* — *cc* *

div. utrinque per 2 *a*

fit *t* ∞ $\frac{aa + bb - cc}{2a}$.

Sed *t* in aliis quoque terminis inveniri potest, quærendo eam ex 3 latera trianguli D B C, hoc pacto:

per 47 primi

Subtr. $\left\{\begin{array}{l}\square DC.\ yy \\ \square GC.\ xx - 2xt + tt\end{array}\right.$ Subtr. $\left\{\begin{array}{l}bb.\ \square BD \\ tt.\ \square BG\end{array}\right.$

$$\square DG.\ yy - xx + 2xt - tt \ \infty\ bb - tt.\ \square DG$$

del. utrinque *tt*, & transf. *yy* & *xx*

$$2\,\square\, CBG \qquad \square BC + \square BD - \square DC$$

$$2xt \ \infty\ xx + bb - yy \ *$$

div. utrinque per $2x$

$$\text{fit } t \ \infty\ \frac{xx + bb - yy}{2x}.$$

Sive igitur quæratur t per 3^a latera $\triangle^{li}$ ABD, sive per 3^a latera $\triangle^{li}$ DBC, elucet utique inde * Propositio 13 secundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipsa adhibenda sit ad FB vel BG inveniendam.

Erit itaque

$$\frac{aa + bb - cc}{a} \ \infty\ \frac{xx + bb - yy}{x}$$

diviso utroque denominatore per 2, instituatur multiplicatio per crucem

$$aax + bbx - ccx \ \infty\ axx + abb - ayy$$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ sunt, ab una parte habeantur

$$bbx - abb \ \infty\ axx - ayy + ccx - aax$$

div. utrinque per $x - a$.

$$\text{eritque } bb \ \infty\ \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}.$$

Quæratur jam v per 3^a latera trianguli ABD

per 47 primi.

Subtr. $\left\{\begin{array}{l}\square AB.\ aa \\ \square AE.\ cc - 2cv + vv\end{array}\right.$ Subtr. $\left\{\begin{array}{l}bb.\ \square BD \\ vv.\ \square ED\end{array}\right.$

$$\square EB.\ aa - cc + 2cv - vv \ \infty\ bb - vv.\ \square EB$$

del. utrinque vv, & transf. aa & cc

$$2cv \ \infty\ bb + cc - aa$$

div. utrinque per $2c$

$$\text{fit } v \ \infty\ \frac{bb + cc - aa}{2c}.$$

Sed v quoque in aliis terminis inveniri potest, quærendo eam per 3^a latera trianguli DBC, hoc pacto:

Subtr.

per 47 primi.

Subtr. $\left\{\begin{array}{l}\square BD.\ bb \\ \square ED.\ vv\end{array}\right.$ Subtr. $\left\{\begin{array}{r}xx.\ \square BC \\ yy+2yv+vv.\ \square EC\end{array}\right.$

$\square EB.\ bb - vv \ \infty\ xx - yy - 2yv - vv.\ \square EB$

del. utrinque vv, & transf. bb & $2yv$

$2\square CDE \qquad \square BC - \square DC - \square BD$

$2yv \ \infty\ xx - yy - bb +$

div. utrinque per $2y$

fit $v \ \infty\ \frac{xx - yy - bb}{2y}$.

Quærendo itaque v per 3^a latera $\triangle$li DBC, emanat hinc Prop. 12 ſecundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipſa debeat adhiberi ut inveniatur ED.

Quare erit

$$\frac{bb+cc-aa}{c} \ \infty\ \frac{xx-yy-bb}{y}$$

diviſo utroque denominatore per 2, inſtituatur multiplicatio per crucem

$$bby + ccy - aay \ \infty\ cxx - cyy - cbb$$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ ſunt, ab una parte habeantur

$$bby + cbb \ \infty\ cxx + aay - cyy - ccy$$

div. utrinque per $y+c$

& fit $bb \ \infty\ \frac{cxx + aay - cyy - ccy}{y+c}$.

Dupliciter igitur invento bb, habebitur æquatio inter $\frac{axx - ayy + ccx - aax}{x-a}$ & $\frac{cxx + aay - cyy - ccy}{y+c}$.

mult. per crucem

$$axxy - ay^3 + ccxy - aaxy + acxx - acyy + c^3x - aacx$$

$$\infty$$

$$cx^3 + aaxy - cxyy - ccxy - acxx - a^3y + acyy + accy$$

tranſpoſitis tranſponendis, fit

$$2acxx + cxyy + c^3x - cx^3 - aacx + 2ccxy$$

$$\infty$$

$$2aaxy + ay^3 + accy - axxy - a^3y + 2acyy$$

div. utrinque per $2ax + yy + cc - xx - aa + 2cy$.

AD DC AB BC

eritque $cx \ \infty\ ay$. Hoc eſt, erit ut c ad y, ita a ad x.

ac proinde $x \ \infty\ \frac{ay}{c}$, & $\frac{cx}{a} \ \infty\ y$. Quæ tertia eſt Propoſitio libri ſexti Euclidis.

Hinc

Hinc existente $bb \propto \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}$, si in locum ay substituatur cx & vice versâ: habebitur $bb \propto \frac{axx - cxy + cay - aax}{x - a}$,

▭ADC + □DB ▭ABC

id est, $bb \propto ax - cy$; seu, quod eodem recidit, $cy + bb \propto ax$. Omnino ut in antecedenti Theoremate. Unde facile est, cognitis AB, BC, AD, & DC, invenire BD.

Quòd si autem, existente $bb \propto ax - cy$, pro x scribatur $\frac{ay}{c}$, fiet $bb \propto \frac{aay}{c} - cy$ vel $bbc \propto aay - ccy$. id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bbc}{aa - cc} \propto y$. Vel, resolvendo æqua-

□AB — □AD □BD AD DC

litatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad bb, ita c ad y. Similiter, si pro y scribatur $\frac{cx}{a}$, erit $bb \propto ax - \frac{ccx}{a}$ vel $bba \propto aax - ccx$. id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bba}{aa - cc} \propto x$. Vel,

□AB — □AD

resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad

□BD AB BC

bb, ita a ad x. Quæ quidem insuper ostendunt, quo pacto ex tribus lateribus △li ABD inveniri possint BC & DC.

Atque ita constat, si ad præcedentis Theorematis investigationem duntaxat adhibeantur 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis, quâ ratione ex calculo non modo idem Theorema emanet, verùm etiam Propositio 12 & 13 secundi libri, 3tia sexti, aliaq́; propositiones, in Euclide non extantes, quæ triangulum concernunt, cujus angulus bifariam est divisus.

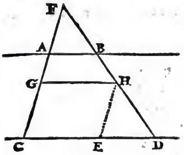
Cæterum calculum hunc multò prolixiorem esse calculo antecedentis Theorematis nemini (ut opinor) mirum videri debet, cum ad illud indagandum supposuerimus Theorema, quod ei immediatè præcedit, tum etiam Prop. 12 aut 13 secundi: siquidem rationes, quæ in iis comprobandis cunctæ ac singulæ sunt perpendendæ, illis sic jam præsuppositis omnino prætermittuntur; quæ alioquin, si rem ipsam penitiùs inspicere atque à

primis

primis velut principiis, (quemadmodum in Algebra præsertim fieri solet,) deducere velimus, longâ serie forent spectanda. Quæ quidem hic refero, ut quilibet intelligat, nonnullos reperiri, etiam in Mathematicis haud leviter versatos, qui videntes hujusmodi calculum sæpenumero valde prolixum evadere, plurimisve terminis constantem, demonstrationes Geometricas ei longè præferunt, non animadvertentes ejusdem beneficio elici Theoremata, quibus ad id concatenatim utuntur. Existimantes præterea Algebram vel hoc nomine non magni faciendam esse, quòd solummodo circa æquationes versetur ac easdem continuè respiciat, quod sanè ego maximi momenti judicaverim; quippe harum ope infinita genera Problematum pro uno genere Problematum haberi queunt, ac demum quicquid in universa Mathesi arduum seu difficile occurrit, id omne per æquationem absque ulla ambage & verborum involucris quàm simplicissime potest explicari.

PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis lineis parallelis AB, CD, & in iis duobus punctis A & E: è puncto F extra ipsas dato rectam lineam ducere FBD, quæ à positione datis abscindat rectas AB, ED, datam inter se rationem habentes AF ad CG, seu a ad d.



Series *Resolutionis*.

Ponatur factum, quod quæritur, hoc est, sit AB ad ED, ut a ad d, sitque AF ∞ a
CF ∞ b
CE ∞ c
& AB ∞ x

 Hinc

Hinc ut AF ad CG, ita AB ad 4^tam^ seu ED

a —— d —— x / $\frac{dx}{a}$

Sed ex similitudine △^lorum^ AFB & CFD est quoque

ut AF ad AB, ita CF add. CE. c

a —— x —— b/ ad CD. $c + \frac{dx}{a}$

Quare erit *per 16 sexti* ▭ AF, CD ▭ AB, CF

$ac + dx \infty bx.$

Transferatur dx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur

eritque $ac \infty bx - dx.$

Dividatur jam utraque pars per $b - d$

& fit $x \infty \frac{ac}{b-d}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $b - d$ ad c, ita a ad x.

Id quod arguit, ad Problema hoc solvendum, statuendum esse ut GF ad CE, ita AF ad AB. Ut autem ipsum componatur, repetantur Resolutionis vestigia & ab ejus fine per eadem redeatur ad id unde initium cepit. Quemadmodum superiùs jam sæpiùs monstratum fuit, atque etiam hic videre est, præmittendo priùs Constructionem, quæ sic se habet.

Constructio.

Ductâ GH parallelâ AB vel CD ac æquali CE, agatur ex F per H recta FHD, secans AB, CD in B & D: dico AB ad ED esse, sicut AF ad CG, seu a ad d.

Finis *Compositionis.*

AF CG AB ED.

Unde *per 16 sexti* erit, ut a ad d, ita x ad f.

▭ AF, ED ▭ CG, AB

erit similiter $af \infty dx.$

▭ AF, CE

Hinc dempto utrinque communi ac,

Quare

▭AF,CE+▭AF,ED ▭AF,CE+▭CG,AB.

Quare erit etiam $ac + af \infty ac + dx$.

▭CF, AB ▭AF, CE+▭CG,AB.

Erat autem & $bx \infty ac + dx$.

▭CF,AB ▭AF,CD,seu,▭AF,CE+▭AF,ED.

Quare per 16 sexti erit $bx \infty ac + af$.

AF AB CF CD

eritque ex similitudine △lorum AFB, & CFD, ut a ad x, ita b ad $c+f$.

Esto jam ED ∞f,

▭CF, AB ▭AF,CE+▭CG,AB.

eritque $bx \infty ac + dx$.

▭CG, AB

Addatur utrinque dx,

▭GF, AB seu ▭CF, AB—▭CG,AB ▭AF,CE.

erit per 16 sexti $bx - dx \infty ac$.

id est, reductâ proportione ad æqualitatem,

GF GH vel CE AF AB

Ex constructione est, ut $b - d$ ad c, ita a ad x;

Principium *Compositionis*.

Relictis igitur hisce vestigiis demonstratio eisdem superstructa erit talis.

Demonstratio.

Quoniam itaque ex constructione G F est ad G H vel C E, sicut A F ad A B: erit [a] rectangulum sub extremis G F, A B æquale rectangulo sub mediis AF, CE. Quibus si addatur commune rectangulum sub CG, AB, erit [b] rectangulum sub tota CF & AB æquale duobus rectangulis sub AF, CE & sub CG, A B. Porrò, quoniam ex similitudine triangulorum A F B & CFD, AF est ad AB, sicut C F ad C D: erit [c] rectangulum sub mediis CF, AB æquale rectangulo sub extremis, AF, CD, hoc est, [d] æquale duobus rectangulis sub AF, CE & sub AF, ED. Erat autem quoque rectangulum sub CF, AB æquale duo-

a per 16 sexti.
b per 1 secundi.
c per 16 sexti.
d per 1 secundi.

bus rectangulis sub AF, CE & sub CG, AB. Æqualia igitur erunt bina rectangula sub AF, CE & sub AF, ED binis rectangulis sub AF, CE & sub CG, AB. A quibus si commune auferatur rectangulum sub AF, CE, erit etiam reliquum rectangulum sub AF, ED æquale reliquo rectangulo sub CG, AB. Unde [e] ut AF ad CG, ita AB ad ED. Quod erat faciendum.

e per 16 sexti.

Hactenus quæ præcesserunt Problemata & Theoremata istius naturæ censeri possunt, quorum difficultas in demonstrationibus ex calculi vestigiis eliciendis potiùs quàm in iisdem per Algebram solvendis & ostendendis consistere judicari debet. Etenim cum in Algebra Problemate aut Theoremate ad Æquationem perducto hac secundùm certas regulas reducatur resolvaturq́, at verò demonstratio Geometrica, quæ ex eorum calculo depromenda est, non semper eisdem legibus sit obnoxia, sed diversimodè prout requiritur, immutanda veniat, ut ipsa commodè feliciterq́ per Geometriæ Elementa explicetur: visum nobis fuit hîc consequenter illius contrarium in adductis aliquot exemplis patefacere, utpote in quibus præcipua difficultas in ipsorum per Algebram enodatione sita esse appareat. In quem finem duas primùm Quæstiones Arithmeticas in medium afferam, ut, ipsis beneficio calculi hujus Geometriæ solutis, cuique fiat manifestum, quo pacto illius ignari deinde ad easdem solvendas ratiocinari possint, vulgaribus tantùm Arithmetices regulis instructi. Quibus aliquot Quæstiones Geometricas ejusdem generis subjuncturus sum, quò simul constet plurimas etiam tales reperiri, post quarum solutionem Algebraicam ultrò velut sese offert solutio ipsarum Geometrica, ita ut quod illius demonstrationem insuper concernit Geometriæ Elementa jam edoctos non effugiat.

Quæstio 44 primæ partis libri primi Exercitationum nostrarum Mathematicarum.

QUÆSTIO.

OEnopola duplex habet vinum, unius 8 stufris, alterius 14 stufris constat cantharus. Vult autem mixtionem facere, ita ut dolium

dolium vini vendere possit 35 florenis. Quæritur, quot cantharos utriusque ad hanc mixtionem faciendam sumere debeat?

Ponatur eum debere sumere x cantharos primi 8 stufr. seu a,
& y cantharos secundi 14 stufr. seu b.

Deinde supponendo dolium continere 80 cantharos seu c, & pretium 35 flor. vel 700 stufrorum, quo ipsum vendi debet, vocari d: erit $x + y \propto c$
& $x \propto c - y$.

Quæratur jam quanti constent canthari utriusque vini, quo dolium impleri debet: dicendo

Canth. *constat* stufr., *quanti constabunt* Canth. stufr.
1 —— a —— x / facit ax. constant canthari primi vini, in dolium infundendi

Canth. *constat* stufr., *quanti constabunt* Canth. stufr.
1 —— b —— y / facit by. constant canthari secundi vini, in dolium infundendi

—— stufr.

eritque summa $ax + by \propto d$.

transf. by in alt. part. —— $ax \propto d - by$

divid. utrinque per a —— fit $x \propto \frac{d - by}{a}$.

Erat autem & $x \propto c - y$.

Quare erit $c - y \propto \frac{d - by}{a}$

mult. utrinque per a —— $ac - ay \propto d - by$

transf. quantitates, ut quæ in y ductæ sunt unam teneant æquationis partem $by - ay \propto d - ac$

div. utrinque per $b - a$ ——

& fit $y \propto \frac{d - ac}{b - a}$ vel $\frac{1d - 1ac}{b - a}$. Id est, erit ut $b - a$ ad 1, ita $d - ac$ ad y.

Quæſtione hâc ita reſolutâ, ut conſtet, quo pacto in quæſiti inventionem circa hæc facienda ratiocinari liceat, inſpiciatur ſequens illorum interpretatio.

Mult. c. 80 Canth. ſeu, dolium
per a. 8 ſtufr.

fiunt ac. 640 ſtufr. . . . .
conſtat dolium plenum vino 8 ſtufrorum.

Subtr.
Ex d. 700 ſtufr. conſtat dolium plenum vino 8 & 14 ſtufrorum
ac. 640 ſtufr.

Relinq. $d-ac$. 60 ſtufri, quibus dolium plus conſtat impletum vino 8 ſtufror. & 14 ſtufrorum, quàm plenum ſolo vino 8 ſtufrorum: vel etiam, quibus canthari 14 ſtufrorum in dolio contenti cariores ſunt cantharis 8 ſtufrorum, illorum loco ſumptis.

ſtufr.
Ex b. 14
ſubtr. a. 8 Canth.

$b-a$. 6 ſtufr. —1— $d-ac$. 60 ſtufr. / facit $\frac{1d-1ac}{b-a}$ ſeu 10 canth. 14 ſtufrorum ∞ y

differentia pretii unius canthari — differentia pretii cantharorum in dolio

ſubtr.
c. 80 Canth. dolii
ſeu 10 canth. 14 ſtufrorum ∞ y
rel. $c-y$. 70 canth. 8 ſtufrorum ∞ x.

Q u æ s t i o.

Quæſtio 46 primæ partis libri primi Exercitationum noſtrarum Mathematicarum.

Ancilla forùm petit, habens $9\frac{1}{2}$ ſtufros, ut iis poma & pira emat; quò cùm veniſſet, 10 poma ipſi offeruntur 1 ſtufr. & 25 pira 2 ſtufris. Quæritur, ſi utriuſque fructus ſimul 100 habere velit, quot poma & pira ſeorſim accipere debeat?

Ponatur ancillam debere accipere x poma, unde cum utriuſque fructus 100 ſeu a ſimul pro $9\frac{1}{2}$ ſtufr. ſeu b habere velit, ſequitur ipſam recipere debere $a-x$ pira.

Hinc cum 10 poma ſeu c offerantur 1 ſtufro ſeu d, & 25 pira ſeu e ſtufris 2 ſeu f, quæratur quanti jam conſtent aſſumpta x poma & $a-x$ pira.

Di-

Dicendo:

Poma *constant* stufr., *quanti constabunt* Poma stufr.

c —— d —— x / facit $\frac{dx}{c}$. constant poma sumenda

Pira *constant* stufr., *quanti constabunt* Pira

e —— f —— $a-x$ / facit $\frac{fa-fx}{e}$. constant pira sumenda

—— stufr.

eritque summa $\frac{dex+cfa-cfx}{ce} \infty b$.

mult. utrinque per ce

$dex + cfa - cfx \infty cbe$

transf. cfa ad alt. partem

$dex - cfx \infty cbe - cfa$

div. utrinque per $de-cf$

& fit $x \infty \frac{cbe-cfa}{de-cf}$.

Ad fractionis hujus resolutionem, fiat ut c ad d, ita e ad quartam, quæ vocetur g: eritque $cg \infty de$. Unde pro $x \infty \frac{cbe-cfa}{de-cf}$ scribi poterit $x \infty \frac{cbe-cfa}{cg-cf}$ vel $\frac{be-fa}{g-f}$. Deinde fiat ut e ad f, ita a ad 4^{tam}, quæ vocetur h: eritque $eh \infty fa$; ita ut pro $x \infty \frac{be-fa}{g-f}$ scribi possit $x \infty \frac{be-eh}{g-f}$. Hinc si demum fiat, ut $g-f$ ad e, ita $b-h$ ad 4^{tam}, erit ea ∞x, quantitati quæsitæ sumendorum pomorum.

Quæ itaque ad quæstionis solutionem circa Algebram sequenti modo argumentandum esse inferunt

Poma stufr. Poma

c d e g

10——1——25/facit $2\frac{1}{2}$ stufr. constant 25 Poma.

subtr. f. 2 stufr. pretium 25 pirorum.

Relinq. $g-f$. $\frac{1}{2}$ stufr. quo 25 poma cariora sunt 25 piris.

Pira stufr. Pira Subtr.

e f a b $9\frac{1}{2}$ stufr. constant 100 poma & pira simul

25——2——100/facit h. 8 stufr. constant 100 pira

relinq. $b-h$. $1\frac{1}{2}$ stufri, quibus 100 poma & pira simul cariora sunt 100 piris, vel etiam,

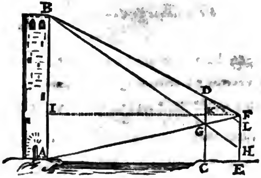
qui-

quibus poma in centenario contenta cariora sunt piris eorum loco sumptis.

ftufr. differ.	Poma	ftufr. differ.	Subtr.
g — *f*	*e*	*b* — *b*	*a*. 100
$\frac{1}{2}$ ———	25 ———	$1\frac{1}{2}$ / facit *x*. 75 poma	
		& *a* — *x*. 25 pira.	

PROBLEMA.

Metiri altitudinem turris AB, ut & distantiam AC, beneficio duorum baculorum CD, EF, datis GD ∞ *a*, CE ∞ *b*, & HF ∞ *c*.



Esto AC ∞ *x*,
& AB ∞ *y*.
Series *Analyseos*.

Ductâ IF parallelâ AE, erit propter similitudinem △rum ABF & GDF
ut AB ad IF vel AE, ita GD ad KF vel CE.
y ——— *x*+*b* ——— *a* / *b*.
Ac proinde per 16 sexti
by ∞ *ax* + *ab*.
Eodem modo, erit propter similitudinem △rum BDG & BFH
ut BD ad BF, sive IK ad IF
hoc est, AC ad AE, ita GD ad HF.
x ——— *x*+*b* ——— *a* / *c*.

Adeo,

Adeoque per 16 sexti

$cx \infty ax + ab$

Auferatur utrinque ax,

& fit $cx - ax \infty ab$.

Dividatur jam utraque pars per $c - a$,

eritque $x \infty \frac{ab}{c-a}$. Hoc est, resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $c - a$ ad a, ita b ad x.

Jam cum eidem æqualia inter se quoque sint æqualia, erit $by \infty cx$. Hoc est, erit ut b ad c, ita x ad y.

Quod si autem invenire lubeat y, non inventâ priùs x, subrogetur in hujus locum in æquatione ultimò hîc inventâ valor ejus inventus $\frac{ab}{c-a}$,

fietque $by \infty \frac{abc}{c-a}$.

Ubi, si utrinque dividatur per b, invenietur $y \infty \frac{ac}{c-a}$. Quæ quidem æqualitas in proportionem sic resolvitur, dicendo: ut $c - a$ ad a, ita c ad y. E quibus itaque hujusmodi Constructio seu operandi modus elucescit.

Sumptâ HL æquali GD, junctâque DK, fiat ut $c - a$ ad a, hoc est, ut FL ad LH, sive FD ad DB, sive etiam FG ad GA, ita EC seu b ad CA seu x; & ita quoque FH seu c ad AB seu y.

Cujus demonstratio ex 2^da & 4^ta sexti libri Elementorum perspicua est, quippe considerando rectam DL ipsi BH parallelam secare proportionaliter rectas BF, FH, perinde ac DC, quæ ipsi AB est parallela, secat rectas AF, AE; ut & rectam FE eidem AB parallelam, facientem △^la similia GFH & GAB.

Cæterùm ut praxis hujus Problematis cuivis obvia sit, visum fuit illud per numeros illustrare, ut sequitur.

digit.

Esto GD $\infty a \infty 24$

CE $\infty b \infty 30$

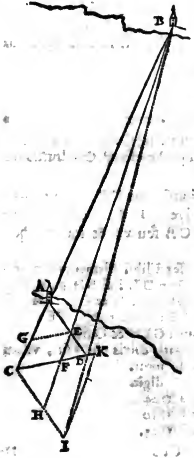
& HF $\infty c \infty 25$.

Ut FL ad LH,
seu FD ad DB,
sive etiam FG ad GA, digit.

1 —— 24, ita $\left\{ \begin{array}{l} EC.\ 30 \\ FH.\ 25 \end{array} \right\}$ ad $\left\{ \begin{array}{l} CA.\ 720. \\ AB.\ 600. \end{array} \right.$

Problema A.

Metiri distantiam turrium A, B, cùm ad A pervenire liceat, datis $CA \infty a$, $AD \infty b$, $CD \infty c$, $AE \infty d$, & $CF \infty e$.



Esto $AB \infty x$.

Series *Analyseos.*

Ductâ GE parallelâ CD, fiat propter similitudinem △rum ADC & AEG,

ut AD ad DC, ita AE ad EG

b —— c —— d, $\frac{cd}{b}$:

itemque

ut AD ad AC, ita AE ad AG.

b —— a —— d, $\frac{ad}{b}$.

Hinc propter similia

△la CBF & GBE

erit ut

CF ad CB, ita GE add. AB. x.

e — $a+x$ — $\frac{cd}{b}$, ad GB. $\frac{ad+bx}{b}$

Ac proinde per 16 sexti erit

▭ CF, GB æquale ▭ CB, GE

$\frac{ade+bex}{b} \infty \frac{acd+cdx}{b}$.

Inventâ igitur æquatione, ut evanescant fractiones, multiplicetur utrinque per b, & fit $ade + bex \infty acd + cdx$.

Transferantur jam quantitates, ita

ita ut quæ in x ductæ sunt unam partem æquationis obtineant, reliquæ autem alteram

fietque $bex - cdx \infty acd - ade$.

Denique dividatur utrinque per $be - cd$

eritque $x \infty \frac{acd - ade}{be - cd}$.

Jam ut æqualitas hæc omnium facillimè in proportionem resolvatur, simulque inde eluceat, quo pacto quis ratiocinari teneatur, ut quæsitam lineam AB seu x ex datis quàm brevissimè inveniat: animadvertere oportet, quænam litera plurimùm omnium in hisce terminis reperiatur. Quæ igitur cum hîc deprehendatur esse d, ipsaque se ter prodat, ubi reliquæ non nisi bis offenduntur, faciendum est, ad deprimendas dimensiones, ut illa in omnibus terminis inveniatur. In quem finem si fiat ut d ad b, ita e ad 4^{tam}, quæ vocetur f: erit $df \infty be$, ac proinde $x \infty \frac{acd - ade}{df - cd}$ seu $\frac{ac - ae}{f - c}$. nimirum, abbreviando terminos omnes per d. Ubi si demum fiat ut $f - c$ ad $c - e$, ita a ad 4^{tam}: erit ipsa ∞x, hoc est, ∞ quæsitæ lineæ AB. Atque ita apparet longitudinem ejus duabus regulis trium seu proportionum inveniri posse, quæ aliàs 3^{bus} aut pluribus investiganda foret, si nullum in resolvenda hac fractione fieret discrimen.

Ubi notandum, eandem fractionem $\frac{acd - ade}{be - cd}$ etiam alio modo in duas proportionum regulas esse resolubilem, quæ singulæ sicut præcedentes non præter unam dimensionem agnoscunt sive omnino simplices existunt. Nimirum considerando in duobus terminis reperiri cd, & in singulis reliquorum duorum reperiri e; adeò ut, si planum cd in aliud transmutetur, cujus unum latus sit e, litera e sic in omnibus terminis haberi valeat, quæ deinde omitti possit. Ac proinde si statuatur, ut e ad c, ita d ad 4^{tam}, quæ vocetur g: erit $eg \infty cd$, ita ut pro $\frac{acd - ade}{be - cd}$ scribi possit $\frac{aeg - ade}{be - eg}$ vel $\frac{ag - ad}{b - g}$. Unde si rursus fiat ut $b - g$ ad $g - d$, ita a ad 4^{tam}: erit ea ∞x, lineæ quæsitæ AB. Quæ quidem animadversio, cum in abstracto fiat nullâ factâ calculi relatione sive restrictione ad figuræ lineas, luculenter ostendit, quàm perperam judicent illi, qui non ritè perspicientes hujus Geometriæ Metho-

dum constructiones concinnas aliunde potiùs quàm ex ejus calculo derivari autumant. Quod utique plurimis exemplis demonstrare possem, iisque non inelegantibus, sed cum id prolixiùs explicare non sit hujus loci, hæc in medium attulisse sufficerit.

Denique ut pateat, quo pacto præcedentis fractionis resolutio ad figuræ lineas pertineat eaque simul nobis manifestet, quales lineæ ducendæ sint, quæ nos ad quæsiti finem perducant: consequens fuerit ut ea quæ ad facilitatem reductionis circa calculum seorsim sumus meditati ad figuræ lineas referamus. Constructio igitur sive operandi modus talis est.

Fiat ut d ad b, hoc est, ut AE ad AD sive CH ad CI, ita CF seu e ad CK seu f. Deinde fiat ut $f-e$ ad $c-e$, hoc est, ut KD ad DF sive ID ad DB, ita CA seu a ad AB seu x.

Cujus demonstratio ex ipsa proportionalium applicatione manifesta est.

Eâdem manente fractionis resolutione possunt dictæ proportionales diversis aliis modis figuræ accommodari, indeque velut aliæ constructiones concinnari, quibus licèt figuræ valde dissimiles appareant, operatio tamen una eademque existit. Quas quidem omnes hic exponere propter earum multitudinem supervacuum duximus. Idem intellige cum præcedens fractio secundo modo resolvitur.

Unde colligere licet, cum ex sola applicatione harum proportionalium, manente resolutione fractionis aut eâdem aliquantulum immutatâ, complures viæ ultro quasi sese prodant, quibus à datis ad quæsitum producamur, quanto ideo cum emolumento hujus Geometriæ calculus ad omnifarias quæstiones adhibeatur; utpote cujus beneficio non modò difficultas omnis breviter ob oculos ponitur, sed etiam quid circa illas sit factu opùs plenè edocetur.

Cæterùm ut iis, quibus hujus generis Problemata arrident, quæ absque ullo instrumento Mathematico in campo perfici queunt, etiam praxis allati Problematis constet, visum fuit illud servando priorem fractionis resolutionem secundùm superiorem ejus applicationem per numeros illustrare, ut sequitur.

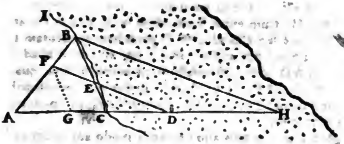
Esto

pedum
Esto CA ∞ a ∞ 450
AD ∞ b ∞ 390
CD ∞ c ∞ 420
AE ∞ d ∞ 225
& CF ∞ e ∞ 252.

Tum fiat
Ut AE ad AD,
sive CH ad CI, ita CF ad CK
225 — 390 — 252 / $436\frac{4}{5}$
CD. 420
subtr. CD. 420 subtr. CF. 252 ped.
Deinde, ut DK. $\overline{16\frac{4}{5}}$ ad FD. $\overline{168}$, ita CA. 450 / ad AB. 4500
Sive ut ID ad DB

PROBLEMA.

Trianguli ABC producto latere AC ad D, ductâque rectâ DEF, secante CB, AB in E & F, dantur AB ∞ a, BC ∞ b, AC ∞ c, CD ∞ d, & CE ∞ e: oporteatque invenire AF ∞ x.



Series *Analyseos.*

Ductâ FG parallelâ BC, fiat propter similitudinem triangulorum ABC & AFG
ut AB ad BC, ita AF ad FG
a —— b —— x / $\frac{bx}{a}$.

Itemque

ut AB ad AC, ita AF ad AG AC GC

a —— c —— x / $\frac{cx}{a}$, quæ subducta ex c, relinquit $\frac{ca-cx}{a}$.

Hinc propter similia △[la] CED & GFD

erit add. CD. d

ut EC ad CD, ita FG

e —— d —— $\frac{bx}{a}$ / ad GD. $\frac{da+ca-cx}{a}$.

Ac proinde per 16 sexti

▭EC, GD ▭CD, FG

$$\frac{dae+cae-cex}{a} \infty \frac{dbx}{a}.$$

mult. utrinque per a

$$dae+cae-cex \infty dbx$$

add. utrinque cex

$$dae+cae \infty dbx+cex$$

v. utrinque per $db+ce$

$$\& \text{ fit } \frac{dae+cae}{db+ce} \infty x.$$

Ad resolvendam hanc fractionem, fiat ut e ad d, ita b ad 4[tam], quæ vocetur f: eritque $fe \infty db$, adeoque $x \infty \frac{dae+cae}{fe+ce}$ seu $\frac{da+ca}{f+c}$. Deinde fiat ut $f+c$ ad a, ita $d+c$ ad x. Quod ipsum docet, ut ex datis lineis investigetur quæsita linea AF, ducendam esse ex B lineam BH ipsi FED parallelam, donec occurrat productæ ACD in H. Cum enim statuendum sit ut e ad d, hoc est, ut CE ad CD, ita b seu CB ad 4[tam] f: patet hanc fore ipsam CH. Ac proinde si porrò fiat ut $f+c$ ad a, hoc est, ut AH ad AB, ita $d+c$ seu AD ad x; manifestum est inveniri hinc quantitatem quæsitæ lineæ AF; ita ut hic sicut in duobus præcedentibus Problematis demonstratio ex sola proportionalium applicatione per se perspicua sit.

Quòd si autem quis alio operandi modo aut etiam eodem sed aliarum linearum ductu quæsitam lineam AF invenire desideret, observare poterit ea, quæ à nobis in antecedenti Problemate indicata sunt.

Cæterùm cum & praxis hujus Problematis in extruendis fortalitiis, chomatibus, promontoriis, aliisve, non parvi usus existat: nimirum, ubi in fluvio, mari, aut locis paludosis à certo puncto

puncto ceu termino recta linea determinari debet, datum continens virgarum pedúmve numerum: non abs re fuerit, si & illius praxin paucis hîc explicavero, præsertim cum absque ullo instrumento Mathematico negotium hoc expedire liceat.

Ponamus itaque in directum ipsius AC à C usque ad D definiendâ esse rectâ CD, continentem 10 perticas seu virgas. In quem finem erectis tribus baculis, A, C, & B, efformantibus triangulum qualecunque ABC, ac inter B & C erecto ubicunque quarto E, si mensurentur AB, BC, AC, & CE, sitque, ex gr., AB ∞ *a* ∞ 15, BC ∞ *b* ∞ 13, AC ∞ *c* ∞ 14, & CE ∞ *e* ∞ 5 perticarum seu virgarum: oportebit ex his juxta & ipsâ CD ∞ *d* ∞ 10 quærere longitudinem lineæ AF, perinde ut supra atque ex sequenti operatione videre est.

CE CD CB Add.
5 —— 10 —— 13 / ad CH. 26 AC. 14
add. AC. 14 AB CD. 10
AH. 40 —— 15 —— AD. 24 / ad AF. 9.

Hinc si ab A versùs B in recta AB mensurentur 9 perticæ seu virgæ, atque in F hujus mensurationis termino baculus erigatur, fiet, ut, si à C in directum ipsius AC progrediamur, extruendo aggerem aut etiam navigando cum scapha, donec perventum fuerit in directum ipsius FE, recta CD tunc 10 perticarum seu virgarum sit futura, qualis requirebatur.

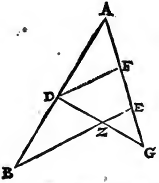
Qui plura hujus generis Problemata videre desideret, adeat Appendicem nostram de Simplicium Problematum constructione, quam unà cum Exercitationibus nostris Mathematicis haud ita pridem in lucem emisimus, ubi ista fusiùs pertractantur, etiam sine ullius calculi adjumento.

PROBLEMA.

cujus solutione innotescit, quâ ratione priora duo Theoremata 11mi Capitis 1mi libri Almagesti PTOLEMÆI *inventa fuerint seu inveniri possint.*

In rectas AB, AG ductis utcunque rectis BE, DG, se mutuò decussantibus in Z, detur ratio GD ad DZ, ut

ut a ad b, nec non ratio ZB ad BE, ut c ad d: oporteatque invenire rationem GA ad AE.



Series *Analyseos.*

Esto GD $\infty\ a$
DZ $\infty\ b$, eritque ZG $\infty\ a-b$
BZ $\infty\ c$
BE $\infty\ d$, eritque ZE $\infty\ d-c$
AG $\infty\ x$
& AE $\infty\ y$, eritque EG $\infty\ x-y$.

Ductâ DF parallelâ BE, erit per 2 sexti

ut GZ ad ZD, ita GE Ex AE. y
$a-b$ —— b —— $x-y$ / ad EF. $\frac{bx-by}{a-b}$ } subtr.
rel. AF. $\frac{ay-bx}{a-b}$.

Tum fiat propter similia $\triangle^{la}$ GZE & GDF
ut GZ ad ZE, ita GD / ad DF. $\frac{ad-ac}{a-b}$.
$a-b$ — $d-c$ —— a

Quibus sic constitutis, erit ex similitudine $\triangle^{lorum}$ DAF & BAE
ut DF ad AF, ita BE ad AE
$\frac{ad-ac}{a-b}$ — $\frac{ay-bx}{a-b}$ —— d / y.

Et fit per 16 sexti

$$\frac{ady-acy}{a-b} \infty \frac{ady-bdx}{a-b}.$$

Hoc est, omisso communi denominatore $a-b$
erit $ady-acy \infty ady-bdx$.

Unde dempto utrinque ady, ac reliquis hinc inde translatis, ut signo + adficiantur

habebitur $bdx \infty acy$.

Quae aequalitas in proportionem sic resolvitur
ut x ad y, ita ac ad bd.

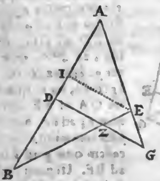
Quod

Quod ipsum docet, rationem quæsitam G A ad A E seu *x* ad *y* esse compositam ex ratione G D ad D Z seu *a* ad *b*, & ex ratione Z B ad B E seu *c* ad *d*, id est, rationem G A ad A E per 23 sexti esse eandem, quàm rectanguli sub G D, B Z seu *ac* ad rectangulum sub B E, D Z seu *bd*. Atque ita constat, quo pacto primum dictorum Theorematum inventum fuerit seu inveniri possit. Id autem ex Rheinoldi versione ita sonat.

In duas rectas lineas A B & A G deductæ duæ rectæ lineæ B E & G D secent se mutuò in puncto Z. Dico quòd ratio G A ad A E composita est ex ratione G D ad D Z, & ex ratione Z B ad B E. „

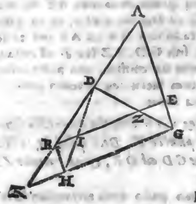
Hinc postquam innotuit, quo pacto datis rationibus G D ad D Z, & Z B ad B E etiam dari intelligatur ratio ipsius G A ad A E, utpote quæ ex datis hisce rationibus est composita: haud inutile fuerit, si ulteriùs hîc ostendam, quibus datis lineis hæc quæsita ratio exprimatur; quandoquidem ratio dari dicitur cui eandem exhibere valemus.

In quem finem si inventa ratio *ac* ad *bd* ad communem altitudinem redigatur, quod quidem quadrupliciter fieri potest, sumendo ad hoc aliquam ex datis lineis, obtinebitur quæsita ratio in simplicissimis terminis.



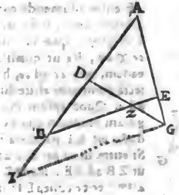
Etenim assumendo communem altitudinem *c*, si fiat ut *c* ad *d*, ita *b* ad 4^tam^, quæ vocetur *e*: erit *ce* ∞ *bd*, ita ut quæsita ratio sit eadem, quæ *ac* ad *ce*, hoc est, rejectâ communi altitudine *c*, ut *a* ad *e*. Quod ipsum Ptolemæi figuram prodit, in qua ex puncto E ducta est E I parallela ipsi G D. Si enim in ea fiat ut *c* ad *d*, id est, ut Z B ad B E, ita D Z seu *b* ad 4^tam^ *e*, erit ea linea E I; ita ut G D ad E I seu *a* ad *e* quæsitam rationem manifestet, eandem quippe quæ est ipsius G A ad A E. Ut patet ex 4^ta^ sexti, propter similitudinem △^rum^ D A G & I A E.

Sic etiam assumendo communem altitudinem *a*, si fiat ut *a* ad *b*,



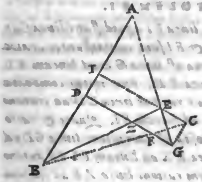
hoc est, ut DG ad DZ, ita HG vel BE seu *d* ad 4^{tam}, quæ vocetur *f*: erit ea ∞ ZI. Et fit *af* ∞ *bd*, ita ut quæsita ratio sit eadem, quæ *ab* ad *af*, hoc est, rejectâ *a* communi altitudine, eadem quæ *c* ad *f* seu EZ ad ZI. Hanc autem eandem esse, quam ipsius GA ad AE, ita patet.

Productis namque AB, GH donec coëant in K, erit propter similitudinem △^{rum} BDZ, KDG, lineamque DH similiter in utroque ductam, ut BZ ad ZI, ita KG ad GH seu BE. Ut autem KG ad BE, ita est, propter similitudinem △^{rum} KAG & BAE, quoque GA ad AE. Quare etiam BZ ad ZI erit, ut GA ad AE. Unde liquet, si *a* pro communi altitudine sumatur, ducendam esse ex G rectam GH ipsi BE parallelam, donec occurrat rectæ ex B ductæ ipsi AG parallelæ in H: eritque, junctâ HD, BZ ad ZI ratio quæsita.



Haud secus, si assumatur communis altitudo *b*, fiatque ut *b* ad *a*, hoc est, ut ZD ad DG, ita BZ seu *c* ad 4^{tam}, quæ vocetur *g*: erit ea ∞ IG. Et fit *bg* ∞ *ac*, ita ut quæsita ratio GA ad AE eadem sit, quæ *bg* ad *bd*, hoc est, rejectâ communi altitudine *b*, eadem quæ *g* ad *d* seu IG ad BE. Ut patet ex similitudine △^{rum} IAG & BAE. Quod ipsum arguit, sumendo *b* pro communi altitudine, ducendam esse ex G rectam GI ipsi BE parallelam, donec occurrat productæ AB in I, ut habeatur ratio quæsita IG ad BE.

Nec

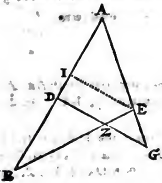


Nec aliter fit, si, assumptâ communi altitudine d, fiat ut d ad c, hoc est, ut BE ad BZ, ita GD vel IC seu a ad 4tam, quæ vocetur b: erit ea ∞ DF. Et fit db ∞ ac, ita ut quæsita ratio sit eadem, quæ db ad bd, hoc est, rejectâ communi altitudine d, eadem quæ b ad b seu DF ad DZ.

Hanc autem eandem esse, quam GA ad AE, ita patet.

Est enim, propter similitudinem △rum BDF & BIC, lineamque BE in utroque similiter ductam, ut DF ad DZ ita CI seu DG ad IE. Ut autem DG ad IE, ita est, propter similitudinem △rum DAG & IAE, GA ad AE. Quocirca & DF ad DZ erit, ut GA ad AE. Atque ita liquet, sumendo d pro communi altitudine, ducendam esse ex G rectam GC ipsi BA parallelam, donec occurrat rectæ per E ipsi DG parallelæ in C, rationem quæsitam esse DF ad DZ.

Cæterùm ut pateat, qua ratione demonstratio præcedentis Theorematis, qualis à Ptolemæo affertur, ex allatis deduci possit; ut & quo pacto exinde plures alias demonstrationes similes conficere liceat: visum fuit eandem unà cum aliis tribus, à me deductis, hic subjungere, calculique vestigia, quibus innituntur, simul hic adhibere atque patefacere.



Ut supra est

ZB BE DZ IE

c——d——b / e

& ce ∞ bd.

Ratio

GA ad AE

ac .... bd

vel ac .... ce

seu GD EI

a .... e

DZ BE

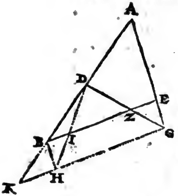
med. term. b. d.

ZB

c

Demonstratio PTOLEMÆI.

,, *Ducatur enim per punctum E linea EI æquidistans lineæ GD.*
,, *Quoniam igitur lineæ GD & EI sunt æquidistantes, ratio*
,, *lineæ GA ad AE eadem est, quæ est lineæ GD ad lineam EI.*
,, *Adsumatur autem deforis linea ZD. Erit igitur composita*
,, *ratio lineæ GD ad lineam EI ex ratione lineæ GD ad lineam*
,, *DZ, & ex ratione lineæ DZ ad lineam EI. Quare & ratio*
,, *lineæ GA ad lineam AE composita est ex ratione lineæ GD ad*
,, *lineam DZ, & ex ratione lineæ DZ ad lineam EI. Est autem*
,, *& ratio lineæ DZ ad EI eadem rationi lineæ ZB ad lineam*
,, *BE, cum æquidistantes sint lineæ EI & ZD. Ratio igitur li-*
,, *neæ GA ad lineam AE composita est ex ratione lineæ GD ad*
,, *lineam DZ, & ex ratione lineæ ZB ad lineam BE. Quod*
,, *erat demonstrandum.*



Aliter.

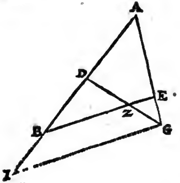
Ut supra est — Ratio
GD DZ BE vel HG ZI — GA ad AE
a — b —— d · f — *ac . . . . . . bd*
& *af* ∞ *bd.* — vel *ac . . . . . . af*
BZ ZI
seu *c . . . . . . f*
DZ
BE vel HG *b.*
med. term. *d*
GD
a.

Ductâ GK parallelâ ipsi BE, donec occurrat productæ AB in K, agatur BH æquidistans AG, occurrens ipsi KG in H, jungaturque HD, secans BE in I.

Quoniam itaque, propter similitudinem △rum KAG & BAE, GA est ad AE, sicut KG ad BE vel HG; sed ut KG ad GH, ita quoque est, propter similitudinem △rum KDG & BDZ, lineamque DH in utroque similiter ductam, BZ ad ZI. Quare etiam

etiam erit GA ad AE, sicut BZ ad ZI. Hinc assumpta forinsecus lineâ BE, quoniam ratio BZ ad ZI composita est ex ratione BZ ad BE, & ex ratione BE vel HG ad ZI, id est, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ HDG & IDZ, ex GD ad DZ: erit perinde ratio GA ad AE composita ex ratione BZ ad BE, & ex ratione GD ad DZ. Quod erat ostendendum.

Adhuc aliter.

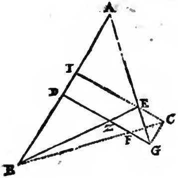


Ut supra est
DZ GD BZ IG
b——a——c / g
& bg ∞ ac.

Ratio
GA ad AE
ac ...... bd
vel bg ...... bd
IG BE
seu g .... d
GD. BZ
a c med.ter.
DZ
b.

Etenim ductâ GI parallelâ BE, usque dum occurrat productæ AB in I: erit, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ IAG & BAE, ut GA ad AE, ita IG ad BE. Hinc cum, assumptâ forinsecus rectâ BZ, ratio ipsius IG ad BE composita sit ex ratione IG ad BZ, id est, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ IDG & BDZ, ex GD ad DZ, & ex ratione BZ ad BE: erit pariter ratio GA ad AE ex iisdem rationibus composita. Quod erat ostendendum.

Vel etiam hoc pacto:



Ut supra est
BE BZ GD DF
d—c— a / b
& db ∞ ac.

Ratio
GA ad AE
ac .... bd
Vel db ...... bd
DF DZ
seu b .... b
BZ.
c. DG vel IC
a. med.ter.
.BE
d.

Ductâ GC ipsi BA parallelâ, donec occurrat rectæ IEC ipsi DG parallelæ in C, jungatur B, secans DG in F.

Quoniam itaque, propter similitudinem △rum DAG & IAE, GA est ad AE, sicut GD vel IC ad IE; at ut IC ad IE, ita quoque est, propter similitudinem △rum BIC & BDF, lineamque BE in utroque similiter ductam, DF ad DZ: erit etiam GA ad AE, sicut DF ad DZ. Assumatur jam forinsecus linea DG. Hinc cum ratio DF ad DZ sit composita ex ratione DF ad DG vel IC, sive BZ ad BE, & ex ratione DG ad DZ: erit similiter ratio GA ad AE composita ex ratione BZ ad BE, & ex ratione DG ad DZ. Quod erat ostendendum.

Idem pariter de 2do PTOLEMÆI Theoremate aliisque similibus est intelligendum.

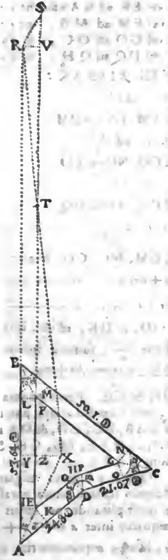
Unde constat, præsuppositâ Algebræ cognitione, haudquaquam necessaria esse existimanda, quæ de Rationum Logistica communiter traduntur, non magis quàm si ad cujusvis generis quæstiones per Algebram solvendas multifaria addiscantur Theoremata: cum & invenire illa & demonstrare ipsius Algebræ sit munus, quam quidem excolendo non modò ingenium exercetur, sed res ipsa funditus eruitur, citra eam verò sæpissime illa ipsa Theoremata non satis feliciter adhibentur.

PROBLEMA.

Latifundii ABCD cognitis omnibus lateribus & angulis, ab eodem datam portionem rescare, lineis EF, FG, GH, & HE latifundii lateribus AB, BC, CD, & DA parallelis, & ab iisdem pari ubique intervallo dissitis.

Junctis AE, BF, CG, & DH, demittantur ex E, F, & G super AB, BC, CD, & DA perpendiculares EI, FL, FM, GN, GO, & EK; at ex D super GH & HE perpendiculares DP & DQ.

Quoniam itaque in rectangulis triangulis AIE & AKE quadrata



drata quæ fiunt ex A I, I E nec non ex A K, K E quadrato ex A E *per 47 primi Elementorum* sunt æqualia, erunt & ipsa inter se æqualia. Est autem quadratum ex E I æquale quadrato ex E K, quippe ob æqualitatem rectarum E I, E K, æquale intervallum indicantium; Quare etiam quadratum ex A I quadrato ex A K æquale erit, adeoque & A I æqualis A K. Hinc cum tria latera trianguli A I E æqualia sint tribus lateribus trianguli A K E, erit quoque angulus I A E angulo K A E *per 8 primi* æqualis, ac proinde angulus B A D per rectam A E bifariam divisus. Haud secus liquet, angulos ad B, C, & D per rectas B F, C G, & D H bifariam divisos esse.

Series *Analyseos*.

Esto A B ∞ *a*
B C ∞ *b*
C D ∞ *c*
D A ∞ *d*
& E I, F L, F M, G N, G O, D P, D Q, vel E K ∞ *x*.

Jam cum propter datos angulos A, B, C, & D etiam eorum semisses dati sint, erit in unoquoque triangulorum ad angulos hosce constitutorum data quoque ratio laterum.

Pona-

Ponatur itaque EI ad IA vel EK ad KA esse, ut e ad f
FL ad LB vel FM ad MB, ut e ad g
GN ad NC vel GO ad OC, ut e ad h
& DP ad PH vel DQ ad QH, ut e ad i.

Tum fiat EI vel EK AI vel AK
ut e ad f, ita x / ad $\frac{fx}{e}$
FL vel FM LB vel BM
ut e ad g, ita x / ad $\frac{gx}{e}$
GN vel GO NC vel CO
ut e ad h, ita x / ad $\frac{hx}{e}$
DP vel DQ PH vel HQ
ut e ad i, ita x / ad $\frac{ix}{e}$.

Additis jam AI, AK, LB, BM, NC, CO, si ipsarum summa $\frac{2fx+2gx+2hx}{e}$ auferatur ex $a+b+c+d$, summa laterum AB, BC, CD, & DA, relinquetur $a+b+c+d\frac{-2fx-2gx-2hx}{e}$, summa rectarum IL, MN, OD, & DK, id est, ipsarum EF, FG, GP, & QE. Quibus si addatur $\frac{2ix}{e}$, summa ipsarum PH, HQ, erit $a+b+c+d\frac{-2fx-2gx-2hx+2ix}{e}$ summa laterum internorum EF, FG, GH, & HE. Porrò quoniam portio abscindenda, quæ vocetur k, pro trapezio accipi potest, cujus duo latera sunt parallela, fit ut si AB, BC, CD, & DA in rectam lineam AR junctim collocentur, ut & EF, FG, GH, & HE in rectam lineam ET, trapezium ARTE ipsi portioni abscindendæ k futurum sit æquale. Quocirca si juxta vulgarem regulam hujus area quæratur, addendo scilicet latera parallela AR & ET, & semissem summæ multiplicando per ipsius latitudinem EI seu x, habebitur æquatio inter $ax+bx+cx+dx\frac{-fxx-gxx-hxx+ixx}{e}$ & k, id est, æquatione ritè ordinatâ, erit $xx \infty \frac{aex+bex+cex+dex}{f+g+h-i} - \frac{ke}{f+g+h-i}$. Cujus radices inveniuntur operando ulteriùs, quemadmodum pag. 7 hujus Geo-

Geometriæ indicatur, quarum quidem major dum lineam exhibet quæsitâ EI manifestè majorem, idcirco meritò hîc erit negligenda.

Quoniam autem ex E, F, G, & D intervallis EI vel EK, FL vel FM, GN vel GO, & DP vel DQ descriptis circulis rectæ AI vel AK, LB vel BM, NC vel CO, & PH vel HQ tangentes sunt complementorum semissium datorum angulorum A, B, C, & D; fiet ut, si *e* pro radio sumatur, ipsæ *f*, *g*, *h*, & *i* dictas tangentes designent. Quod cum eodem modo de omnibus aliis figuris rectilineis intelligendum sit, à quibus hujusmodi portio resecari debet: haud difficulter poterimus, si angulos A, B, C similesque vocemus externos, at angulum D internum, ut & eos omnes, qui hujusce generis existunt, atque præter æquationis constitutionem spectemus insuper, quænam ad illam resolvendam sive ad quæsitam latitudinem ex ea obtinendam sint facienda, regulam inde generalem formare, quæ sic se habet.

Additis figuræ lateribus, multiplicetur summa per radium 100000, productumque dividatur per summam tangentium, angulorum qui semissium datorum sunt complementa, cùm videlicet dati anguli omnes sunt externi, aut per earundem differentiam, quum externi ac interni existunt, & fit primum inventum.

Deinde multiplicatâ areâ portionis abscindendæ per radium 100000, dividatur productum per prædictam summam vel differentiam tangentium, & fit secundum inventum. Quo subducto à quadrato semissis primi inventi, si reliqui radix ab eodem semisse auferatur, relinquetur latitudo quæsita.

Inventâ igitur per Algebram viâ, quâ Problema propositum solvendum sit, ipsius veritas ex sequentis calculi applicatione, quæ ab ea parùm est aliena, manifesta fiet; si modò ibidem consideraverimus, completo parallelogrammo ARSE, productisque AE, RT donec coëant in X, rectam ST, duplum supra dictæ summæ vel differentiæ tangentium referre, atque demissis perpendicularibus RV & XY rectam ST ad RV, ob similitudinem triangulorum STR & ARX, eam habere rationem, quam AR habet ad XY.

Angul.
A. 50 6 Add.
ſemiſſis. 25. 6, ejus Tang. Compl.
B. 50.38′ AI vel AK eſt 214451
ſemiſſis. 25.19, ejus Tang. Compl.
C. 54.12′ LB vel BM eſt 211392
ſemiſſis. 27. 6, ejus Tang. Compl.
NC vel CO eſt 195417
D. 205.16 621260 } ſubtr.
ſemiſſis. 102.35, ejus Tang. Compl.
PH vel HQ eſt 22322
differentia 598938
2 Rad. RV.
partes ST. 1197876 — 100000 — AR. 149|61 (2)

Add.
AB. 53|64
BC. 50|1
CD. 21|07
DA. 24|8

multipl.
AR. 14961 (2)
ad XY. 1249 (2)
134649
59844
29922
14961
product. 1868|6289 (4)

Ut △ ARX ſeu $\frac{1}{2}$ XY, AR ad □ XY ſeu XY, XY, vel, relicta communi altitudine XY ut $\frac{1}{2}$ AR ad XY, ſive etiam, propter ſimil. △rum STR & ARX ut $\frac{1}{2}$ ST ad RV, ita

ſemiſſis ſeu triang. ARX. 934|3144 (4)
ſubtr. part. reſec. ſeu trap. ARTE. 600|

598938 — 100000 — rel. triang. ETX. 334|3144 (4) / ad □ XZ. 55|81|78 (4)
eritque XZ. 7| 4| 7 (2).

Hinc ſubducta XZ ſeu 747 (2) ex XY ſeu 1249 (2), relinquetur 502 (2) pro YZ latitudine quæſita portionis abſcindendæ.

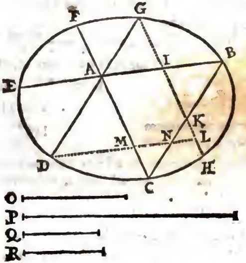
Cæterùm cum non abſimili modo à data qualibet figura rectilinea portio datæ magnitudinis abſcindi poſſit, aut etiam quæ ipſius figuræ certam partem ſive partes contineat, lineis quibuſdam duntaxat lateribus parallelis & ab iiſdem æquali intervallo diſtantibus: plura hac de re afferre ſupervacaneum duximus, præſertim cum materiam hanc nec non determinationes eò ſpectantes jam ſæpius in Lectionibus noſtris Publicis abundè pertractavetimus

verimus, eaque occasione illa multis etiam jam diu innotuisse certò sciverimus.

THEOREMA,

quod ad solutionem artificiosissimam Problematis pag. 372 ut concessum supponitur.

Cum in rimanda olim solutione Problematis p. 372 nonnulla deprehendissem, quæ ad eandem ut concessa supponebantur, eaq; post commentarios meos in hanc Geometriam Theoremate ad id Geometricè resoluto corroborâssem: visum fuit calculum, è quo eandem resolutionem tunc deprompsi, hic in medium afferre, ac quo pacto idem à me sit præstitum eâ quâ potero perspicuitate cuivis ob oculos ponere. In quem finem si huc revocetur Theorema jam dictum unà cum illis, quæ ad explicationem ejus p. 369 & 370 ulterius sunt allata, inspiciendus erit deinceps sequens calculus.



Assumpto quæsito ut vero, hoc est, CA esse ad AF, sicut CB ad AG, ducatur porrò DL parallela AB, secans CA, CB in M & N, ac occurrens ipsi GH in L, ponaturque DA ∞ *y*.

Deinde calculus sic procedat

Ex assumptione est

CA AF CB AG

$c - d - b / \text{ad} \frac{db}{c} \infty z$

Ex similitudine $\triangle^{rum}$ BAC & AIG est

BC CA AG GI

$b - c - \frac{db}{c} / \text{ad } d.$ Unde IK erit ∞ $c - d$, pro qua brevitatis causâ scribatur *f*.

Et apparet ex hac assumptione GI inveniri æqualem FA.

item-

itemque

CA AB GI IA

c — a — d / ad $\frac{ad}{c}$ } add.

AE. e

1 *

Ex similitudine △rum CAB & KIB est

EI. $\frac{ce+ad}{c}$ } Mult.

CA AB KI

c — a — f / ad IB. $\frac{af}{c}$

* 2

▭EIB $\frac{ceaf+adaf}{cc}$

Denique ex natura Ellipsis, per 17. 3tii Conicorum Apollonii,

▭GIH est ad ▭FAC,

Seu, propter rectas GI, FA, supra æquales,

IH ad AC, ut ▭EIB ad ▭EAB

$\frac{cef+adf}{cc}$ — c — $\frac{ceaf+adaf}{cc}$ — ea

Et fit, multiplicando tum medios tum extremos, $ace+aad \infty ace+aad$.

Ex hypothesi est

BA AE BC AD

a — e — b / ad $\frac{eb}{a} \infty y$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3tii Conicorum Apollonii, proportionalia sunt

▭FAC ▭GKH ▭DAG ▭CKB

dc — cx — yz — $bz-zz$

seu, rejectis communibus altitudinibus AC, GK; & AG, CK

FA KH DA KB

d — x — y — $b-z$

hoc est, restitutis valoribus ipsarum y & z

d — x — $\frac{eb}{a}$ — $\frac{cb-db}{c}$ seu $\frac{fb}{c}$

Unde KH seu x, per 16. 6ti,

fit $\infty \frac{acd-add}{ce}$ seu $\frac{adf}{ce}$

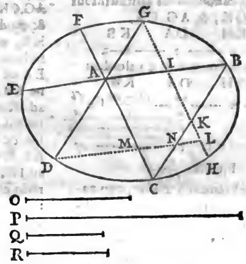
add. IK. f.

IH. $\frac{cef+adf}{ce}$

Id quod arguit, cum assumendo quæsitum tanquam concessum per calculum hunc Geometricum ad verum concessum devenerimus, quæsitum illud, quod cum hoc concesso omnimode connectitur, esse quoque verum. Quod erat ostendendum.

Porrò ut intelligatur, quâ ratione ex hoc calculo supra dicta resolutio à me deducta fuerit: haud gravabor eundem calculum hic ulteriùs ita disponere, dictamq; resolutionem illi à latere sic adhibere, ut cuivis sedulò hæc inspicienti enucleatè appareat, quisnam inter illum & hanc resolutionem mutuus consensus existat. Præsertim cum hujus resolutionis inventio deinde mihi ansam, complures alias demonstrationes Geometricas con-

conficiendi, subministraverit; atque ipsa etiam artificium detexisse mihi visa sit, quo Veteres, in multis difficilioribus demonstrationibus concinnandis, usi sunt. Qui quidem id unicè studuisse videntur, quò sua inventa eorumq; demonstrationes posteris majori admirationi forent, ut modum, quo ea ipsa invenerint ac demonstrationibus muniverint, prorsus supprimerent & absconderent.



Ex assumptione
CA AF CB AG
c——d——b | ad $\frac{db}{c}$ ∞ z.

Et permutando per 16. 5
CA CB AF AG
c——b——d | ad $\frac{db}{c}$

Ex similitudine △rum BAC, AIG
BC CA AG GI
b——c—— $\frac{db}{c}$ | ad d.

Et convertendo per Cor. 4. 5
CA CB GI AG
c——b——d | ad $\frac{db}{c}$

Quia hic ex assumptione reperitur GI exprimi per eandem quantitatem, quam AF, colligitur inde ipsas aequales esse. Haud secus aequales erunt EA & DM.

Quoniam igitur supponitur CA esse ad AF, sicut CB ad AG; erit etiam permutando CA ad CB, sicut AF ad AG. Jam quia, ex similitudine △rum BAC & AIG BC est ad CA, sicut AG ad GI; & convertendo CA ad CB, sicut GI ad AG: erit AF per 9. 5ti ipsi GI aequalis. Eodem modo aequales erunt EA & DM.

Ex

Ex hypothesi

BA AE BC AD

a —— e —— b, ad $\frac{eb}{a} \infty y$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3tii Conicorum Apollonii

▭FAC ▭GKH ▭DAG ▭CKB

dc —— cx —— yz —— bz — zz

H. e., rejectis communibus altitudinibus AC, GK; & AG, CK,

FA KH DA KB

d —— x —— y —— b — z

Et restitutis ipsarum y & z valoribus

FA KH DA KB

d —— x —— $\frac{eb}{a}$ —— $\frac{cb - db}{c}$ seu $\frac{fb}{c}$

ceb —————— afb

KH ce —————— af

Fit $x \infty \frac{adf}{ce}$.

Jam ut ex Elementis constet, quo pacto ratio ipsius DA ad KB in simplicissimis terminis exprimi possit, cum via illam inveniendi multiplicatione per crucem (quemadmodum vulgò fit) omnino sit Algebraïca: calculum hic apponam, è quo ipsæ DA & KB resultant.

BA AE BC AD

a — e — b, ad $\frac{eb}{a}$

CA IK BC KB

c — f — b, ad $\frac{fb}{c}$

EA AB

e —— a

CA IK

23.6. c —— f

▭CAE ▭KI,AB

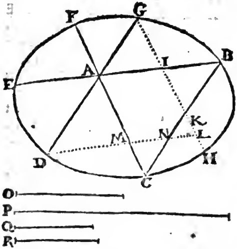
ce —— af

Porrò cum ex natura Ellipsis ▭FAC sit ad ▭GKH, seu, propter rectarum AC, GK æqualitatem, FA ad KH, sicut ▭DAG ad ▭CKB, h. e., propter æqualitatem rectarum AG, CK, ut DA ad KB; & quidem ratio DA ad KB, composita sit ex ratione DA ad CB seu EA ad AB, & ex ratione CB ad KB seu CA ad IK: erit quoque ratio FA ad KH composita ex ratione EA ad AB, & ex ratione CA ad IK. Ideoque cum ratio composita ex ratione EA ad AB, & ex ratione CA ad IK, sit ea, quam habet ▭CAE ad ▭KI, AB: erit similiter ratio ipsius FA ad KH ea, quam habet ▭CAE ad ▭KI, AB.

Ubi apparet, cum in utraque hac proportionis regula idem terminus BC ipsis AD & KB præcedat, quod ratio ipsius AD ad KB, per hujus BC interpositionem, sit composita ex ratione AD ad BC seu EA ad AB, hoc est, e ad a, & ex ratione BC ad KB seu CA ad IK, hoc est, c ad f. Ac proinde, cum ratio ex his composita, per 23. 6, sit eadem rationi, quam habet ▭CAE ad ▭KI, AB, seu ce ad af: erit quo-

que

que ratio ipsius F A ad K H seu *d* ad *x* eadem, quam habet ▭CAE ad ▭KI, AB, seu *ce* ad *af*.



Ad comparandam IH cum AC, quia, inventâ KH $\propto \frac{adf}{cc}$, ad KH addi priùs debet IK $\propto f$, ut habeatur IH $\propto \frac{ccf+adf}{cc}$; sed hoc pacto ratio ipsius IH ad AC non satis commodè videtur Geometricè explicabilis: quæsivi priùs rationem ipsius IH ad IK; inde per compositionem rationis conversam, & per alias denique comparationes venio ad rationem ipsius IH ad AC, ut sequitur.

Esto KI ad FA, KH

f ———— d x

ut O ad CA.

3* $\frac{cf}{d}$ ———— c

Mult. per AE. e . . . . e

hoc est, ut ▭O,AE ad ▭CAE ▭KI, AB

per 1. 6. $\frac{cef}{d}$ ———— ce . . . . . . af

Unde ex æquo & per compositionem rationis conversam erit

Ut KI+KH seu IH ad KI

$f+x$ ———— f

sic ▭O,AE+▭KI,AB ad ▭O,AE.

$\frac{cef}{d}+af$ ———— $\frac{cef}{d}$

Esto jam KI ad FA, sicut linea O ad CA. Unde, assumptâ A E pro communi altitudine, erit KI ad FA, sicut ▭ sub O & AE ad ▭CAE. Erat autem FA ad KH, sicut ▭CAE ad ▭KI, AB. Quare ex æquo erit ut KI ad KH, sic ▭O, AE ad ▭KI, AB; & per compositionem rationis conversam KI + KH seu IH ad KI, sicut ▭O, AE + ▭KI, AB, ad ▭O, AE.

Sit

IH Sit KI ad AC,

$f+x$ . . . . f ——— e

ut O ad P. 4*

$\frac{ef}{d}$ ——— $\frac{ee}{d}$

Mult. per AE. e .... e

hoc eſt,

▭O,AE+▭KI,AB ut ▭O,AE ad ▭P,AE

$\frac{eef+adf}{f}$ .... $\frac{eef}{d}$ ——— $\frac{eee}{a}$

Unde ex æquo erit ut IH ad AC, ita ▭O,AE+▭KI,AB ad ▭P,AE.

Sed ut IH ad AC, ita quoque eſt propter rectas IG & FA ſupra æquales mult. per IG...... FA per 1. 6. ▭GIH ad ▭FAC, hoc eſt, per 17. 3tii Conic. Apoll., ut ▭EIB ad ▭EAB

Quocirca erit ut ▭O,AE+▭KI,AB ad ▭P,AE, ita ▭EIB ad ▭EAB.

Deinde ſit ut KI ad AC, ita O ad P. Unde, aſſumptâ AE pro communi altitudine, erit KI ad AC, ſicut ▭O,AE ad ▭P,AE. Sed ut IH ad KI, ita eſt ▭O,AE+▭KI,AB ad ▭O,AE. Quapropter ex æquo erit ut IH ad AC, ſic ▭O,AE+▭KI,AB ad ▭P,AE. Cum verò rurſus, ut ante, ▭GIH ſit ad ▭FAC, ſicut ▭EIB ad ▭EAB; & quidem IG & AF, ut ſupra, æquales ſint oſtenſæ: erit quoque IH ad AC, ſicut ▭EIB ad ▭EAB. Ut autem IH ad AC, ſic quoque erat ▭O,AE+▭KI,AB ad ▭P,AE. Quocirca erit ut ▭O,AE+▭KI,AB ad ▭P,AE, ita ▭EIB ad ▭EAB.

Fiat jam, ut AE ad AB, ita KI ad Q

e ——— a ——— f / $\frac{af}{e}$. 5*

eritque per 16. 6. ▭KI,AB ∞ ▭Q,AE.

Adeoque ut

▭O,AE+▭KI,AB, ſeu Q,AE ad ▭P,AE,

hoc eſt, rejectâ communi altitudine AE,

ut O+Q ad P, ſic ▭EIB ad ▭EAB.

$\frac{ef}{d}+\frac{af}{e}$ ——— $\frac{ee}{d}$ ——— $\frac{eeaf+adaf}{ee}$ — ea

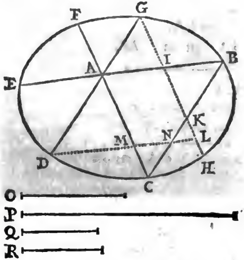
Fiat jam ut AE, ad AB, ita KI ad Q: eritque ▭KI,AB æquale ▭Q,AE. Hinc ut ▭O,AE plus ▭KI,AB ſeu Q,AE, ad ▭P,AE, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem AE, ut O+Q ad P, ſic ▭EIB ad ▭EAB.

Explicita itaque eſt ratio, quam habet ▭GIH ad ▭FAC, quippe oſtenſa eſt eadem quæ ipſius IH ad AC, ſeu O+Q ad P.

Quo-

Quocirca jam ratio explicanda restat, quæ est inter ▭EIB & ▭EAB.

Quoniam autem in hac explicanda ad 4^or dimensiones ascenditur, deveniendum erit ad pauciores dimensiones, ut tota resolutio duntaxat per rectarum aut planorum considerationem absolvatur.



EI seu EA+AI — EA

$\frac{cc+ad}{c}$ ———— c

23.6. IB — AB

$\frac{af}{c}$ ———— a

▭EIB seu ▭ sub EA+AI in IB — ▭EAB

$\frac{ceaf+adaf}{cc}$ ———— ca

Ut EI seu EA+AI est ad EA,

$\frac{cc+ad}{c}$ ———— c

Mult. per CA. c c

sic ▭EA, CA + ▭AI, CA est ad ▭CAE.

$cc+ad$ — cc

Vel, si pro ▭EA, CA, propter similitudinem △^rum CAB & AMD, ubi CA est ad AB,

Porrò quoniam ratio ▭li EIB ad ▭EAB composita est ex ratione EI seu EA+AI ad EA, & ex ratione IB ad AB; & quidem EA+AI ad EA, si com-

sicut A M ad M D seu E A scribatur ▭ B A M,

sicut ▭ B A M + ▭ C A I ad ▭ B A M.

Vel rursus, si pro ▭ CAI, propter similitudinem △rum B A C & A I G, scribatur ▭ BA, GI, sicut ▭ B A M + ▭ B A, GI ad ▭ B A M, hoc est, sicut AM + GI, hoc est, G L ad A M. relictâ communi altitudine B A,

(Vide supra ad notam 1*)

Ut I B est ad AB,

af ——— a

c

Mult. per C A

c c

ita ▭ IB, C A est ad ▭ C A B.

af ——— ca

Vel, si pro ▭ I B, C A, propter similitudinem △rum C A B & K I B, scribatur ▭ KI, AB, sic ▭ K I, A B ad ▭ C A B, hoc est, relictâ communi altitudine AB, sicut KI ad CA.

(Vide supra ad notam 2*)

communis assumatur altitudo C A, sit sicut ▭ C A E, seu B A M, + ▭ C A I seu B A, G I ad ▭ C A E seu B A M, hoc est, relinquendo communem altitudinem B A, sicut A M + G I seu G L ad A M; at verò I B ad A B, sicut ▭ I B, C A seu K I, A B ad ▭ C A B, hoc est, destruendo communem altitudinem A B, sicut K I ad C A: Erit quoque ratio ▭'i E I B ad ▭ E A B, hoc est, ipsius O + Q ad P, composita ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

Constat igitur, rationem ▭li E I B ad ▭ E A B seu ipsius O + Q ad P esse compositam ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

Jam quia superior ratio ipsius O + Q ad P nulli rationi linearum, quæ in Ellipsi ductæ sunt, respondet; neque etiam adhuc luculenter patet, eam, si cum ratione G L ad A M, aut K I ad CA confertur, ex his compositam esse, quemadmodum ex assumptis jam fuit deductum; fiat præterea ut

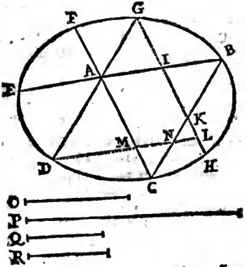
KI ad Q, sic F A ad R.

f ——— ef/e ——— d f ad/e. 6*

eritque, per 16. 6ti,

▭ K I, R ∞ ▭ Q, F A.

Denique fiat ut K I ad Q, sic F A ad R: eritque ▭ K I, R æquale ▭ Q, F A. Ac proinde cum O + Q ad P,



Ut O + Q est ad P,

$\frac{cf}{d}+\frac{af}{e}$ ——— $\frac{cc}{d}$

Mult. per FA. d. . . . . . d

fit ▭O,FA seu KI,CA,+▭Q,FA seu KI,R est ad ▭P,FA seu □CA.

Vide supra ad notam 3* $cf+\frac{daf}{e}$ ——— cc

Cur ▭P, FA sit ∞ □CA, ita concluditur

3* Est namque KI ad FA, ut O ad CA;

f ——— d ——— $\frac{cf}{d}$ ———

& convertendo

FA ad KI, CA

d ——— f c

ut CA ad O P Vide supra ad notam 4*

c ——— $\frac{cf}{d}$ . . . . . $\frac{cc}{d}$

Unde ex æquo erit

ut FA ad CA, ita CA ad P.

d ——— c ——— c ——— $\frac{cc}{d}$

Ac proinde, per 17.6ti, ▭P, FA ∞ □CA.

ad P, assumendo communem altitudinem FA, fit sicut ▭O,FA seu KI, CA, +▭lo Q, FA seu KI, R ad ▭P, FA seu □CA: Erit ratio composita ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA eadem rationi ▭li KI,CA+▭KI, R ad □CA, hoc est, eadem rationi, quæ componitur ex ratione KI ad CA, & ex ratione CA+R ad CA. Ideoque si communis auferatur

KI CA

f —— c

23.6. CA+R CA

$c+\frac{ad}{e}$ —— c

▭KI, CA + ▭KI, R □CA

$cf+\frac{daf}{e}$ —— cc

ratio KI ad CA, erit quoque reliqua ratio GL ad AM eadem reliquæ rationi CA+R ad CA, hoc est, erit GL ad AM, ut CA+R ad CA. Quod verum esse deinceps sic ostenditur.

Hinc cum ratio ▭li GIH ad ▭FAC sive ipsius IH ad AC eadem sit ostensa quæ ipsius O+Q ad P, & hæc rursus eadem rationi, quæ componitur ex ratione KI ad CA, & ex ratione CA+R ad CA; at verò ratio ▭li EIB ad ▭EAB eadem rationi, quæ componitur ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA: sequitur, si ratio ▭li GIH ad ▭FAC (quemadmodum suppositum fuit) eadem sit rationi ▭li EIB ad ▭EAB, rationem compositam ex KI ad CA, & ex ratione CA+R ad CA debere quoque eandem esse rationi, quæ ex GL ad AM, & ex KI ad CA componitur. Ac proinde, si utrobique communis auferatur ratio KI ad CA, rationem reliquam CA+R ad CA eandem quoque fore reliquæ rationi GL ad AM.

Hoc autem cum nondum per se evidens sit, superest ut ipsum sequenti argumentatione resolvamus atque penitus manifestum reddamus.

Ex similitudine △lorum ABC & MDA est

AB AC MD seu AE MA seu IL

a —— c —— e / ad $\frac{ce}{a}$. Unde GL fit $\infty\ d+\frac{ce}{a}$.

Ex similitudine △lorum ABC & IAG est

BA AC AI IG seu AF

a —— c —— $\frac{ad}{c}$ —— d

Ac proinde, per 16. 6ti, ▭BAF ∞ ▭CAI.

Ex similitudine △lorum GLD & AMD est

GL ad AM,

$d+\frac{ce}{a}$ —— $\frac{ce}{a}$

Quoniam enim, propter similitudinem triangulorum GLD & AMD, est ut GL ad AM, ita DL seu EI ad DM

sicut DL seu EI ad DM seu EA;

$e + \frac{ad}{e}$ ———— e

mult. per CA. c c

Vel per 1. 2di

sicut ▭EI,CA seu CAE+CAI seu AE,R ad ▭CAE.

$ce + ad$ ———————— ce

hoc est, relictâ communi altitudine AE, sicut CA+R ad CA.

DM seu EA; ut autem EI ad EA, ita, assumptâ communi altitudine CA, ▭EI, CA seu CAE plus ▭CAI seu AE, R est ad ▭CAE: Erit ut GL ad AM, ita ▭CAE + ▭R,AE ad ▭CAE, hoc est, destruendo communem altitudinem AE, sic CA+R ad CA.

Ex constructione est

	KI	Q	FA	R
Vide supra ad notam 6*	f	$\frac{af}{e}$	dl	$\frac{ad}{e}$
itemque	AE	AB	KI	Q
Vide supra ad notam 5*	e	a	fl	$\frac{af}{e}$
Ideoque	AE	AB	FA	R
per 11. 5ti.	e	a	d	$\frac{ad}{e}$

Ac proinde per 16. 6ti, ▭BAF ∞ ▭AE, R.

Hinc cum ▭BAF etiam sit ∞ ▭CAI, erit similiter ▭AE, R ∞ ▭CAI.

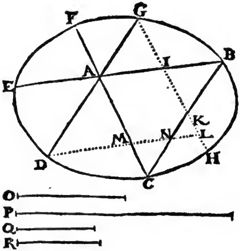
Patet itaque GL esse ad AM, sicut CA+R ad CA. Ut erat propositum.

Quare cum hoc pacto, assumentes quæsitum tanquam verum, per resolutionem Geometricam devenerimus ad verum concessum: sequitur, quæsitum illud, quod cum concesso isto omnimodè connectitur, verum esse. Hoc est, umbram baculi C, quæ transibat per A, transiisse similiter per B. Quod erat demonstrandum.

Et hæc quidem, quæ Resolutionem Geometricam Theorematis concernunt, quod ad solutionem Problematis pag. 372 ut concessum suppositum fuit. Cæterùm quoniam iis, qui cum Logicis statuunt ex falsis etiam posse verum concludi, resolutio hæc ad quæsiti ostensionem incerta videri potest: placuit majoris certitudinis ergo idem Theorema Syntheticè verificare, procedendo à concessis ad quæsita, prout ad hoc me instigavit præ-

ſtantiſſimus ac undequaque doctiſſimus juvenis D. Petrus Hartſingius, Japonenſis, quondam in addiſcendis Mathematis diſcipulus meus ſolertiſſimus.

Demonſtratio autem ipſa filum calculi ſequitur, qualis extat pag. 370 & 371, at eodem nonnihil hic immutato; ut appareat paſſim artificium, quo ſingula Geometricè explicari queant.



Poſitâ, ut ante, AD ∞ y
erit ut BA ad AE, ita BC ad AD
a —— e —— b. / ad y ſeu $\frac{be}{a}$.
ac proinde per 16. 6ti
▭BA, AD, ▭BC, AE
a ay ∞ be.

Ex natura Ellipſis per 17 Conicorum Apollonii.

AD. y KB. $b - z$
AG. z AG vel CK z
eſt ▭DAG. $\overline{yz}$ ad ▭CKB. $\overline{bz - zz}$,
FA. d KH. x
AC. c AC vel KG. c
ut ▭FAC, $\overline{cd}$ ad ▭GKH. $\overline{cx}$.

Quoniam igitur ex hypotheſi eſt BA ad AE, ſicut BC ad AD: erit ▭lum ſub extremis BA, AD æquale ▭lo ſub mediis BC, AE Deinde quoniam ex natura Ellipſis eſt, ut ▭DAG ad ▭CKB, ſive, rejectâ communi altitudine AG vel CK, ut DA ad KB, ita ▭FAC ad

AG AC

id est, rejectis communibus altitudinibus z & c,
erit ut DA ad KB, ita FA ad KH

y —— b − z —— d / ad x.

BA

sive, assumendo communem altitudinem a,
ut ▭BA, AD seu ▭BC, AE ad ▭BA, KB, ita FA ad KH

α ay vel be —— ab − az —— d / ad x. δ

ad ▭BA, KB: erit ut ▭BC, AE ad ▭BA, KB, ita FA ad KH.

Esto jam KI ∞ f.

eritque propter similitudinem △rum BCA & BKI
ut BC ad CA, ita BK ad KI

b —— c —— b − z / ad f seu $\frac{cb - cz}{b}$. ac proinde per 16. 6ti.

add. HK. x

mult. HI. $\overline{f + x}$ ▭BC, KI ▭CA, BK

per IG. b ζ bf ∞ cb − cz.

Deinde sit IG ∞ b.

▭GIH. fb + bx

eritque propt. simil. △rum BCA & AGI
ut BC ad CA, ita AG ad GI

b —— c —— z / ad b seu $\frac{cz}{b}$. ac proinde per 16. 6ti

▭BC, IG ▭CA, AG

β bb ∞ cz.

Similiter esto AI ∞ k.
eritque propter simil. △rum BCA & AGI
ut BC ad BA, ita AG ad AI

b —— a —— z / ad k seu $\frac{az}{b}$. ac proinde per 16. 6ti

add. AE. e

mult. EI. $\overline{k + e}$ ▭BC, AI ▭BA, AG

per IB. l bk ∞ az.

▭EIB. kl + el

Sit item IB ∞ l
eritque propter simil. △rum BCA & BKI

ad ▭GKH, id est, relictâ communi altitudine AC vel GK, ita FA ad KH; & quidem DA ad KB, si BA pro communi altitudine sumatur, sit sicut ▭BA, AD seu α BC, AE

Porrò cum ex similitudine △rum BCA & BKI, BC sit ad CA, sicut BK ad KI: erit ▭ sub BC, KI æquale ▭lo sub CA, BK. Eâdem ratione cum BC sit ad BA, sicut BK ad BI: erit ▭ sub BC, BI æquale ▭lo sub BA, BK.

Haud secus cum similia sint △la BCA & AGI, ad idcirco BC ac CA, sicut AG ad GI: erit ▭ sub BC, GI æquale ▭lo sub CA, AG. Similiter cum BC sit ad

ut

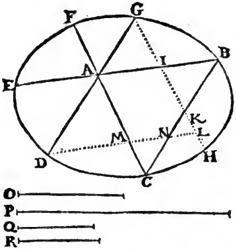
ut BC ad BA, ita BK ad BI

b —— a —— $b-z$, ad l seu $\frac{ab-az}{b}$, ac proinde per 16. 6ti

▭ BC, BI ▭ BA, BK

γ bl ∞ $ab-az$.

BA, sicut AG ad AI: erit pariter ▭ sub BC, AI æquale ▭lo sub AB, AG.



Ex natura Ellipsis per 17. 3tii Conic. Apollonii est ▭ FAC ad ▭ GIH, ut ▭ EAB ad ▭ EIB

cd —— $bf+bx$ —— ae ad $kl+el$.

Est autem per 23. 6ti ratio ▭li FAC ad ▭ GIH

cd —— $bf+bx$

composita ex ratione FA ad IH seu IK+KH, &

d —— $f+x$

ex ratione CA ad GI, id est, assumendo commu-

c —— b

BC

nem altitudinem b, ex ratione ▭li

β

BC, CA ad ▭ BC, GI vel ▭ CA, AG, sive, reje-

bc —— bb seu cz

CA

ctâ communi altitudine c, ex ratione BC ad AG.

b —— z.

Jam verò, quia ex natura Ellipsis ▭ FAC est ad ▭ GIH, ut ▭ EAB ad ▭ EIB; & quidem ratio ▭li FAC ad ▭ GIH composita sit ex ratione FA ad IH seu IK+KH, & ex ratione CA ad GI, id est, assumendo communem altitudinem BC, ex ratione ▭li BC, CA ad ▭ BC, GI vel β ▭ CA, AG, sive etiam, re-

Simi-

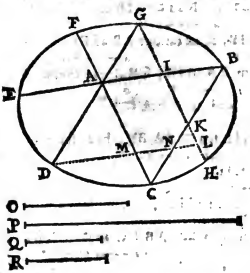
Similiter ratio ▭li E A B ad ▭ E I B composita est
ae —— $kl + el$
ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I.
e —— kl a —— $k + e$.

Quarum quidem E A ad I B, si B C pro communi
e —— l b
altitudine sumatur, eadem est quæ ▭li
γ
B C, E A ad ▭ B C, I B seu ▭ B A, B K, hoc est, ea-
be —— bl vel ab — az
dem quæ ♂ F A ad K H.
d —— x

Sed A B ad E I, si B C similiter pro communi altitu-
a — $k + e$ bb ——
dine sumatur, eadem, quæ ▭li A B, B C ad ▭ B C, E I
ab —— $bk + be$
vel ▭ B C, A I, id est, B A, A G, + ▭ B C, E A vel ▭ B A,
sive az + ay
A D, hoc est, relictâ communi altitudine A B, seu a,
eadem quæ B C ad A G + A D.
b —— $z + y$.

Erit igitur ratio composita ex ratione
F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est,
d —— $f + x$ b —— z
per 23. 6ti, ratio ▭li F A, B C ad ▭ I K, A G + ▭ K H, A G,
bd —— $fz + xz$
eadem rationi quæ componitur ex ratione F A ad K H,
d —— x
& ex ratione B C ad A G + A D, id est, per 23. 6ti,
b —— $z + y$
eadem rationi, quam habet
▭ F A, B C ad ▭ K H, A G + ▭ K H, A D.
bd —— $xz + xy$.

jectâ communi altitudine C A, ex ratione B C ad A G; At ratio ▭li E A B ad ▭ E I B composita ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I; quarum quidem E A ad I B, si B C pro communi altitudine sumatur, est sicut ▭ B C, E A ad ▭ B C, I B seu γ ▭ B A, B K, quæ eadem ostensa est ♂ rationi F A ad K H; sed A B ad E I, si B C similiter pro communi altitudine sumatur, ut ▭ A B, B C, ad ▭ B C, E I, id est, ad ▭ B C, A I vel , B A, A G, + ▭ B C, E A vel α ▭ B A, A D, sive etiam, relictâ communi altitudine A B, ut B C ad A G + A D: Erit ratio composita ex ratione F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est, per 23. 6ti, ratio ▭li F A, B C ad ▭ I K, A G + ▭ K H, A G, eadem rationi, quæ componitur ex F A ad K H, & ex ratione B C ad A G + A D, id est, per 23. 6ti, eadem rationi, quam habet ▭ F A, B C ad ▭ K H, A G + ▭ K H, A D.



Hinc cum
▭FA,BC, sit ad ▭IK,AG+▭KH,AG, sicut idem ▭FA, BC ad
bd ——— $fz+xz$ ——— bd
▭KH,AG+▭KH, AD: erit, per 9. 5ti,
ad $xz+xy$:
▭IK,AG+▭KH,AG æq. ▭KH,AG+▭KH,AD.
$fz+xz$ ∞ $xz+xy$.

Unde, dempto utrinque communi ▭lo KH, AG,
xz
erit quoque reliq. ▭IK,AG æquale reliquo ▭lo
fz
KH, AD.
xy

Ac proinde, per 16. 6ti,
ut IK ad KH, ita DA ad AG.
f —— x —— y, ad z.

reliquum ▭IK,AG æquale reliquo ▭lo KH,AD. Unde erit ut IK ad KH, ita DA ad AG.

Hinc cum ▭FA,BC ad ▭IK,AG+▭KH, AG eandem habeat rationem, quam idem ▭FA,BC ad ▭KH,AG +▭KH, AD: erit ▭IK,AG +▭KH AG æquale ▭lo KH, AG+▭lo KH, AD. A quibus si commune auferatur ▭KH, AG, erit quoque

Sed

BC
Sed ut IK ad KH, ita est, ass. comm. altit. *b*,
f —— *x*
ζ
▭IK, BC vel ▭CA, BK ad ▭KH, BC.
bf   *cb* — *cz* —— *bx*.

AB
At DA ad AG, ita, ass. com. altit. *a*, est ▭DA, AB
y —— *z*.
a
vel ▭BC, AE ad ▭AG, AB.
be ——— *az*.

Quare erit ut
▭CA, BK ad ▭KH, BC, ita ▭BC, AE ad ▭AG, AB.
cb — *cz* —— *bx* —— *be* / ad *az*.

BC
Cum autem supra sit FA ad KH, i. e., ass. com. alt. *b*,
d —— *x*
▭FA, BC ad ▭KH, BC, sicut ▭AE, BC ad ▭KB, BA,
bd —— *bx* —— *be* / ad *ab* — *az*,
hoc est, convertendo
▭KH, BC ad ▭FA, BC, sicut ▭KB, BA ad ▭AE, BC:
bx —— *bd* —— *ab* — *az* / ad *be*:
Erunt ▭CA, BK ▭KH, BC ▭FA, BC tres magnitudines ab una parte,
cb — *cz* —— *bx* ...... *bd*
& ▭KB, BA ▭AE, BC ▭AG, AB tres aliæ ab altera parte, quæ binæ sumptæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est perturbata:
ab — *az* ..... *be* —— *az*

Sed ut IK ad KH, ita est, assumptâ communi altitudine BC, ▭IK, BC vel *ζ* ▭CA, BK ad ▭KH, BC. At sicut DA ad AG, ita, assumptâ communi altitudine AB, ▭DA, AB vel *a* ▭BC, AE ad ▭AG, AB. Quare erit ut ▭CA, BK ad ▭KH, BC, ita ▭BC, AE ad ▭AG, AB. Cum autem supra sit *ϑ*, ut FA ad KH, sive, assumptâ communi altitudine BC, ▭FA, BC ad ▭KH, BC, ita ▭AE, BC ad ▭KB, BA; id est, convertendo, ▭KH, BC ad ▭FA, BC, sicut ▭KB, BA ad ▭AE, BC: erunt ▭CA, BK, ▭KH, BC, & ▭FA, BC; magnitudines ab una parte, & ▭KB, BA, ▭AB, BC, & ▭AG, AB tres aliæ ab altera parte, quæ binæ sumptæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est perturbata.

Quare

Quare etiam per 23. 5[ti] ex æqualitate proportionales erunt

id est, ▭ CA, BK ad ▭ FA, BC, ficut ▭ KB, BA

cb—cz ——— *bd* ———— *ab—az*

BA

ad ▭ AG, BA, seu, rej. com. alt. •, ut KB ad AG.

——— *az* . . . . *b—z*——*z*.

Id quod convenit cum æquatione inventa pag 371, multiplicando sc. tum extremos tum medios terminos, ostendens nos in eodem calculo Geometricè explicando eò pervenisse, ubi cbz — czz æquatur bbd — bdz.

Denique ut inveniatur AG seu *z*, quoniam sumendo CA seu *c* pro communi altitudine,

KB est ad AG, sicut ▭ CA, KB ad ▭ CA, AG:

b—z —— *z* ——— *cb—cz* / ad *cz*:

erit ut

▭ CA, BK ad ▭ FA, BC, ita ▭ CA, KB ad ▭ CA, AG.

cb—cz ——— *bd* ——— *cb—cz* / ad *cz*.

Hinc cum ▭ CA, BK ad ▭ FA, BC & ad ▭ CA, AG

cb—cz *bd* *cz*

eandem habeat rationem, erit per 9. 5[ti],

▭ FA, BC æq. ▭[lo] CA, AG.

bd ∞ *cz*.

Unde per 16. 6[ti] erit,

ut CA ad AF, ita BC ad AG.

c —— *d* —— *b* / ad *z*.

Quod erat propositum.

Unde & ipsæ ex æqualitate proportionales erunt, nimirum, erit ut ▭ CA, BK ad ▭ FA, BC, ita ▭ KB, BA ad ▭ AG, BA, id est, relictâ communi altitudine BA, ita KB ad AG. Denique, quoniam, assumptâ communi altitudine CA, KB est ad AG, sicut ▭ CA, KB ad ▭ CA, AG: erit ut ▭ CA, BK ad ▭ FA, BC, ita ▭ CA, KB ad ▭ CA, AG. Quocirca cum ▭ CA, BK ad ▭ FA, BC & ad ▭ CA, AG eandem habeat rationem, erit ▭ FA, BC æquale ▭[lo] CA, AG; ac proinde CA ad AF, sicut BC ad AG. Quod erat demonstrandum.

FINIS.

LECTORI BENEVOLO

J. HUDDE S. P.

IN Galliis eram cum epistolæ meæ imprimerentur, ideoque domum redux, onus in me suscepi omnia de integro revidendi & ad calculum revocandi, ut probè mihi constaret, num quædam nimis obscurè expressa essent, vel etiam errata irrepsissent; Quæcunque inveni, illa sunt quæ sequuntur.

Ad clariorem sensum.

P. 424 l. 15, *Excepto* &c. Cum $x - a \propto 0$, multiplicatur per $b-c$, resultat $bx - cx - ab + ac \propto 0$, seu $x \propto \frac{ab-ac}{b-c}$; si ponas jam $b-c \propto 0$, non sequitur valorem x per hanc æquationem non posse inveniri, quandoquidem Nominator $ab-ac$ per $b-c$, dividi potest, sed tum sequitur cum Nominator per Denominatorem non dividi potest, vel cum ambo per eandem quantitatem indivisibiles sunt: Notandum ergo est Denominatorem hìc considerari sine relatione ad Nominatorem, veluti patet ex sequentibus, 1°. *Observandum venit num ejusmodi quantitates in æquatione reperiantur* &c. 2°. *si reperiantur, num utramque æquationem dividant.* Sed hæc omnia fortassis clariùs sic intelligentur. Excepto tantùm si æquationis primus terminus non affectus quantitate cognita sit ab una parte, reliqui, qui ab altera sunt, faciant fractionem, cujus Denominator, vel Denominatoris divisor aliquis, Nominatorem dividat; quod si contingat, videndum est, prinsquam concludatur non dari duarum æquationum communem aliquem divisorem, num etiam altera æquatio, per hunc Denominatorem, vel Denominatoris divisorem aliquem divisibilis sit. p. 451 & 456, l. 1. lege, nullus terminus est $\propto 0$. p. 500, in medio, pro *Quoniam tunc* $\sqrt{C.}$ *ex* $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$ *extrahi poterit*; scribe, extrahendo $\sqrt{C.}$ ex $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$. & pro, *sed cum* $\sqrt{C.}$ *&c.*, usque ad, *liceat, &c.*; pone, sed cum $\sqrt{C.}$ ex binomio numerali ope Regulæ p. 389. vel perfectè extrahi queat, vel vulgari modo præterpropter, quod sufficit, poterit etiam ejusdem beneficio radix ex æquatione Proposita sive numerali sive literali inveniri, cum pro literis numeros, vel 0, ad arbitrium assumere liceat. p. 502, l. 31. & p. 505, l. 17. *reduci* hic sumitur pro redigi ad duas alias, ex quarum multiplicatione Proposita æquatio produci potest.

Nec

Nec tacere fas est me, non sine admiratione, in epistolis meis, quae tam sedulam typothetarum operam requirebant, tam paucos errores offendisse, nisi cogitarem D. Elzevirios & Clarissimum Schotenium totis viribus huic operæ incubuisse, quapropter nullus dubito, quin reliquum totum opus accuratius impressum sit, quàm quis fortassis exspectâsset.

CARMEN
IN LAUDEM
FR. à SCHOOTEN,
Mathematicorum ocelli.

SCotenI cum scripta legis, se promit ubique
Ingenii mira dexteritate vigor.
Cum vitam ac mores spectas, se præbet ubique
Spectandam integritas, ac sine fraude manus.
Sic quæ perrarò concurrunt corpore in uno,
Hîc jungi ingenium cum probitate vides.
Adde quòd, ingenium cum sit superabile paucis,
Vix tamen invenies in probitate parem.

NOTÆ

ET

ANIMADVERSIONES

TUMULTUARIÆ

In Vniverſum Opus.

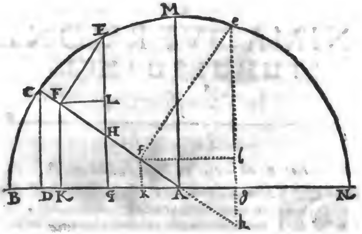
NOTAE ET ANIMADVERSIONES TUMULTUARIÆ In Vniversum Opus.

Part. I.

Pag. 3. *ad lit. G. & Pag.* 84. *ad lit. R.*

PRimum, quod in resolutione alicujus Problematis faciendum præcipit Auctor noster, concernit quantitatum nomenclationem, in eo consistentem, ut lineæ omnes quæ ad constructionem ejus necessariæ videbuntur, tam cognitæ quàm incognitæ, literis quibusdam Alphabeti designentur. Et ne hoc promiscuè fiat, adjicit in posteriori loco, delectu quandoque opus esse circà incognitas; cùm plurimi sæpè referat, quænam accipiantur pro incognitis, ut operatio, quantum fieri potest, brevis atque facilis reddatur. Ubi Tyrones sequentia moneri operæ pretium ducimus: Primò, si inter quantitates cognitas nonnullæ sint, quæ à se mutuò dependeant, seu quarum una per alteram determinetur, tum licebit quidem initio operationis cuique peculiarem literam tribuere, at postmodùm in calculi progressu aut fine, literæ istæ variè invicem permutandæ sunt, nunc earum valores substituendo, nunc restituendo literas, prout animadvertimus, hoc vel illo modo quantitatum terminos abbreviatum iri. Deinde conducit nonnunquam expendere, non tantùm qualis quantitas pro incognitâ accipienda sit; sed etiam quis præcipuè ordo sit tenendus in analysi, ut quæsitum quàm facillimè obtineamus: sæpè enim eâdem re-

tentâ quantitate incognitâ, unâ quàm aliâ viâ incedendo operatio expeditior evadit. Utrumque facili aliquo exemplo declarabimus.



Problema: In semicirculo BMN datis duorum arcuum BC & CE, sigillatim quadrante minorum, sinubus rectis CD & EF, quæritur sinus arcûs compositi ex ipsis, nempe recta EG. *Anal.* Ad hanc indagandam sunto Sinus tot. AC ∞ a, CD ∞ b, EF ∞ c, & EG ∞ z; & quoniam prævideo necessarios quoque fore sinûs complementorum AD, AF & AG, voco insuper AD d, AF e, & AG y. Unde cùm ob æquales angulos ACD, AHG & FHE, triangula rectangula ADC, AGH & EFH sint similia; adeoque AD d ad DC b, ut AG y ad GH, nec non AD d ad AC a, ut EF c ad EH, reperiuntur GH ∞ $\frac{by}{d}$, & EH ∞ $\frac{ac}{d}$, ac proinde summa vel differentia utriusque, hoc est, quæsita EG sive z ∞ $\frac{ac \,\aleph\, by}{d}$, nempe $\frac{ac+by}{d}$ in sinistro, & $\frac{ac-by}{d}$ in dextro quadrante. Jam quoniam sinûs complementorum AD, AF & AG, seu d, e & y, per sinûs rectos CD, EF & EG, seu b, c & z ita determinantur, ut sit d ∞ $\sqrt{aa-bb}$, e ∞ $\sqrt{aa-cc}$, & y ∞ $\sqrt{aa-zz}$; hinc variè utor

utor his valoribus ad quæsitum in terminis simplicissimis eliciendum: Primò ex æquatione tollo y, ut fiat $z \propto \frac{ac \pm b\sqrt{aa-zz}}{d}$ sive $dz - ac \propto \pm b\sqrt{aa-zz}$, & eorum quadrata $ddzz - 2acdz + aacc \propto aabb - bbzz$, factâque convenienti transpositione $bbzz + ddzz - 2acdz \propto aabb - aacc$. Deinde ad contrahendam æquationem substituo aa loco $bb + dd$, fietque $aazz - 2acdz \propto aabb - aacc$; ubi quia additâ utrobique $ccdd$, prior pars æquationis $aazz - 2acdz + ccdd \propto aabb - aacc + ccdd$, fit quadratum, extraho utrinque radicem, ut habeatur æquatio $az - cd \propto \sqrt{aabb - aacc + ccdd}$ sive $z \propto \frac{cd + \sqrt{aabb - aacc + ccdd}}{a}$; ad quam porrò abbreviandam pro $aa - dd$ pono bb, & resultat $z \propto \frac{cd + \sqrt{aabb - bbcc}}{a}$, iterumque ee loco $aa - cc$; sic tandem fiet $z \propto \frac{cd + \sqrt{bbee}}{a} \propto \frac{cd + be}{a}$, quæ simplicissima est expressio valoris z, quo indicatur sinum quæsitum arcûs compositi haberi, si aggregatum rectangulorum sub sinubus rectis datorum arcuum & sinubus alternorum complementorum per sinum totum dividatur.

Ut verò etiam constet alterum, quando diximus, quòd eâdem quantitate incognitâ retentâ sæpè præstet hoc quàm illo modo solutionem aggredi, observandum est, æquationem nostram immediatè absq; substitutione vel reductione prævià ad hos terminos perduci posse, si quæsitum sinum EG non per partes EH, HG, sed per ipsas EL, LG investigemus, faciendo ut AC ad CD seu a ad b, sic AF seu e ad FK sive LG, quæ propterea erit $\frac{be}{a}$; iterumque ob similitud. Triang. ACD & FEL (utpote quorum utrumque Triangulo FHL simile est) ut AC ad AD, sive a ad d, sic FE seu e ad EL, quæ proinde fit $\frac{cd}{a}$; hinc enim statim habetur tota EG $\propto \frac{cd + be}{a}$, ut anteà. Ubi notare convenit, quòd si vicissim ex datis sinubus EG, CD, inveniendus sit sinus differentiæ arcuum EF, compendiosior futura sit operatio, quâ quæruntur partes GH, HE, quàm quâ partes GL & LE. Uterque autem modus ostendit, quæsitum sinum EF haberi, si differentia rectangulo-

gulorum ſub ſinubus rectis datorum arcuum & ſinubus alternorum complementorum per ſinum totum dividatur.

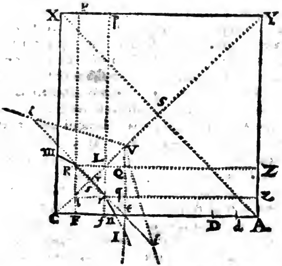
Pag. 4. ad lit. H, & Pag. 150. ſeqq.

Cùm in Problemate aliquo determinato plures ſuppoſitæ fuerunt literæ incognitæ, totidemque repertæ æquationes, ſolet Auctor, priuſquàm ad ejus conſtructionem accedat, has æquationes variè tractando ac inter ſeſe comparando eò reducere, ut tandem una tantùm in æquatione litera incognita remaneat, & ſic ex omnibus æquationibus indeterminatis una determinata reſultet: quod deinde Commentator ejus Schootenius p. 150. exemplo cujuſdam Problematis illuſtrat, ubi poſtquàm ad duas æquationes indeterminatas $aa+xx+yy \propto 2dy$, & $aac-cxx-cyy \propto 2aby$ perveniſſet, exinde tertiam determinatam $y \propto \frac{aac}{ab+cd}$ elicit, ac tum demum Problematis conſtructionem molitur. Ad quæ notare convenit, quòd communiter quidem hoc ſit optimum, ubi tertia hæc æquatio non multò magis eſt compoſita, quàm duæ reliquæ, ut in allato exemplo contingere videmus: nam ſi animadverterem fore, ut ex reductione indeterminatarum emergeret aliqua valdè compoſita & constructu difficilis, ſatiùs tum eſſet ſtatim ſubſiſtere in indeterminatis, & Problema conficere per *Loca*, conſtruendo unumquemque Locum ſeu æquationem indeterminatam ſeorſim, ut per mutuas utriuſque interſectiones poſtmodùm quæſitum obtineatur; præſertim cùm ejuſmodi conſtructiones ab ipsâ quaſi naturâ ſubminiſtratæ videantur, & caſuum varietatem, poſſibilitatem, limites totamque indolem Problematis multò meliùs ob oculos ponant, quàm illæ, quæ Auctoris methodo ex tertiâ demùm æquatione longis ambagibus & inſuperabili ſæpè labore eliciendæ forent, quæque propterea coactæ potiùs & minùs naturales jure merito cenſendæ, ut maximè & ipſæ propriè non aliter niſi per *Loca*, id eſt, per deſcriptionem duarum Linearum abſolvantur.

His explicandis idoneum nobis exemplum ſuppeditat Problema illuſtre de quadriſecando Triangulo Scaleno per duas normales rectas, cujus analyſis, quam hic brevitatis ſtudio omittimus, inſerta

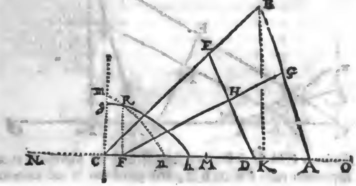
inserta legitur Actis Erudit. Lipf. m. Novemb. 1687. Apparet, hoc Problema duas conditiones includere, quarum una requirit, ut rectæ bisecantes Triangulum, illud unà quadrisecent; altera, ut bisecantes rectæ ad angulos rectos se decussent; quarum unaquæque seorsim & abstractè ab alterâ spectata Problema indeterminatum relinquit, peculiaremque æquationem subministrat, duas complectentem incognitas literas x & y, quæ pro denotandis segmentis lateris duas quadrisecantium extremitates recipientis assumendæ fuerunt. Prior Æquatio, quæ quadrisectioni respondet, hæc est: $yy - 4ay + 4xy + \frac{5}{2}aa - 4ax + xx \propto 0$. Posterior, quæ anguli qualitatem respicit, ista: $4xxyy \pm 2aeyy \pm 2afxx \pm aaef \propto aadd$, ex quarum mutuâ collatione oritur tertia æquatio determinata octo dimensionum, pluriumque membrorum; cujus constructionem si quis Auctoris methodo investigandam susciperet, non tantùm per superfluas & non naturales ambages incederet, sed & opus immensi fortàsse laboris aggrederetur: cùm contrà facilis & expedita pateat via, quæsitum consequendi absque tertiæ æquationis ope per solam constructionem Locorum jam repertorum, & quæ ipsa Problematis natura ad id negotii spontè suggessisse videtur. Constat autem ex iis, quæ Auctor lib. 2. exponit, æquationem priorem denotare Locum ad Hyperbolam; alteram ad Curvam quandam tertii generis seu sectionibus Conicis duobus gradibus altiorem; quarum descriptiones ita habent:

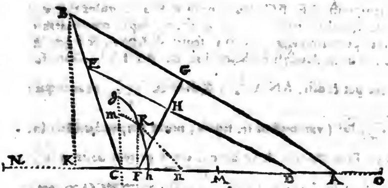
Constr. Æquat. pr. Erecto super base Trianguli cujusvis A C quadrato A C X Y, ductisque diagoniis A X, C Y, sese decussantibus in S, trisecetur C S in T & V, centroque V ac vertice T ad axem C T Hyperbola describatur mTn, cujus transversum latus sit T S, & rectum ejus triplum C Y. Dico, si ei intrà quadratum applicetur quævis recta R F (r f) basi C A perpendicularis, & huic ex parte A æqualis abscindatur A D (Ad), puncta D & F (d & f) futura talia, ut ex illis duæ rectæ inflecti possint, quæ Triangulum propositum quadrisecent (quamvis subinde ad alios & alios angulos); adeoque Hyperbolam descriptam fore Locum prioris æquationis, quæ quadrisectionem respicit: $yy - 4ay + 4xy + \frac{5}{2}aa - 4ax + xx \propto 0$. Ad quod demonstrandum, per punctum Hyperbolæ R agantur rectæ R Z, R P, parallelæ oppositis □ii lateribus, & secantes diagonalem C Y in L & l; nec non R s perpen-



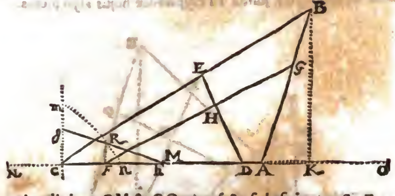
diculàris diagonio CY; & per punctum V recta VI parallela lateri CX, secans ductam RZ in Q, basin CA in t, & hyperbolam productam infrà basin in I: ponaturque $AC \infty a$, $Rs \infty p$, $Vs \infty q$, CD hoc est PR, seu pL aut $pY \infty x$, & AF seu PY vel $Pl \infty y$; adeoque $LY \infty x\sqrt{2}$, & $lY \infty y\sqrt{2}$. Quo facto erit ex naturâ Hyperbolæ, □lum SsT seu Ss in sT, hoc est, $\overline{q + \frac{a\sqrt{2}}{6}}$ in $\overline{q - \frac{a\sqrt{2}}{6}}$, seu $qq - \frac{1}{18}aa$, ad □tum Rs seu pp; sicut TS ad CY, seu 1 ad 3; adeoque, multiplicatis extremis & mediis, $pp \infty 3qq - \frac{1}{6}aa$. Porrò, quoniam Ll bisecta est in s per rectam Rs, propter angulos ad s rectos, & semirectos ad L & l, ac proinde $Ls \infty sR \infty sl$, fiet sY, seu semissis summæ rectarum LY & lY $\infty \frac{\overline{x+y}\sqrt{2}}{2}$, demtâque $VY \infty \frac{2}{3}a\sqrt{2}$ (ob $CY \infty a\sqrt{2}$) habebitur sV seu $q \infty \frac{\overline{x+y}\sqrt{2}}{2} - \frac{2a\sqrt{2}}{3}$: similiterque reperietur Rs vel $p \infty \frac{1}{2}Ll$ sive semissi differentiæ inter LY & lY $\infty \frac{\overline{x-y}\sqrt{2}}{2}$; qui valores literarum p & q, si in æquatione $pp \infty 3qq - \frac{1}{6}aa$ substituantur, dabunt æquationem: $yy - 4ay + 4xy + \frac{5}{2}aa - 4ax + xx \infty 0$, quæ

quæ prorsus convenit cum propositâ, quam proin ritè constructam esse constat. Addimus obiter: si ex junctâ & productâ T t abscindatur Ti ∞ VI, erit juncta Vi Hyperbolæ hujus asymptotos.



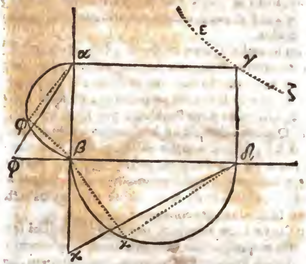


Constr. Æquat. post. Demissâ ex vertice Trianguli perpendiculari BK, & bisectâ base AC in M, assumtoque in eâdem puncto utcunque F ad partes ipsius C. abscindatur ad easdem partes recta AN tertia proportionalis ad AM & AF, ad oppositas verò ipsa KO tertia proportionalis ad KN & BK; ut & CD media proportio-



portionalis inter CM & CO: quo facto si basi in puncto F normaliter applicetur recta FR ∞ AD, erit punctum R ad curvam optatam gRh, respondentem alteri æquationi, quæ anguli conditionem implet: $4xxyy \; 8 \; 2aeyy \; 8 \; 2afxx \; 8 \; aaef \infty aadd$; id est, erunt puncta D & F talia, ut per illa ductæ rectæ bisecantes Triangulum DE, FG, sese mutuò in H ad angulos rectos intersecent. Quod sic patet: Assumtis, præter suprà memoratas quantitates, perpendiculari BK $\infty\, d$, segm. CK $\infty\, e$, & segm. AK $\infty\, f$ (planè ut in Analysi Problem. loc. cit. Act. Lips. factum fuit) habetur per constr. AN $\infty \frac{2yy}{a}$, & KO $\infty \frac{dd}{\frac{2yy}{a} \, 8 \, f}$; adeoque CO ∞ $\frac{dd}{\frac{2yy}{a} \, 8 \, f} \, 8 \, e$ (variantibus sc. signis, prout perpendicularis intrà vel extrà Triangulum, & ad hanc illamvè partem basis cadit): unde cùm CM sit $\frac{1}{2}a$, erit $\frac{1}{2}a$ in $\frac{dd}{\frac{2yy}{a} \, 8 \, f} \, 8 \, e \infty \square$ MCO ∞ (perconst.) CDq (seu PRq in fig. pag. 428.) $\infty\, xx$; factâque reductione $4xxyy \; 8 \; 2aeyy \; 8 \; 2afxx \; 8 \; aaef \infty aadd$. Quod erat ostendendum.

Eadem



Eadem constructio non ineleganter sic variabitur: Ductis rectis $\alpha\kappa$, $\delta\varphi$, ad angulos rectos sese decussantibus in β, abscindantur in iis rectæ $\beta\kappa$ & $\beta\phi$, quarum illa sit media proportionalis inter CM & CK, hæc inter AM & AK; factoque $\square^{lo}$ $\alpha\beta\gamma\delta \propto \triangle^{lo}$ dato ABC, jungantur rectæ $\delta\kappa$ & $\alpha\phi$, vel assumtâ harum alterutrâ ad lubitum mediante $\square^{lo}$ reperiatur altera, (nota, quòd in sec. trium præc. figg. recta $\beta\kappa$ semicirculo super $\beta\delta$, & in tertiâ $\beta\phi$ semicirculo super $\beta\alpha$ descripto applicanda est; cætera verò peragenda, ut dictum;) quo facto junctæ rectæ $\delta\kappa$, $\alpha\varphi$, statim denotabunt ipsas x & y, abscindendas in base $\triangle^{li}$ pro quæsitis CD & AF, vel pro YZ & ZR in fig. pag. 428. ad habendum punctum R quæsitæ Curvæ gRh. Et sic tot alia puncta hujus Curvæ reperiri possunt, quot alia rectangula dato triangulo sigillatim æqualia super rectis indefinitis $\alpha\beta$, $\beta\delta$ constituta fuerint; quæ rectangula omnia unâ operâ determinantur, si per punctum γ inter Asymptotos $\beta\alpha$ & $\beta\delta$ describatur Hyperbola $\varepsilon\gamma\zeta$, ut ex naturâ hujus curvæ constat. *Dem.* Cùm enim per constr. $\beta\kappa$ sit $\propto \sqrt{\tfrac{1}{2}ae}$, & $\beta\varphi \propto \sqrt{\tfrac{1}{2}af}$, ponanturque $\kappa\delta \propto x$, & $\varphi\alpha \propto y$; erit $\beta\delta \propto \sqrt{xx \; 8 \; \tfrac{1}{2}ae}$, & $\beta\alpha \propto \sqrt{yy \; 8 \; \tfrac{1}{2}af}$,

 adeo-

adeoque ▭lum $a\delta$, id est, per constr. △lum ABC, sive $\frac{1}{2} a d \propto \sqrt{xx \; 8 \; \frac{1}{2} ae}$, in $yy \; 8 \; \frac{1}{2} af$; quâ reductâ habetur $4xxyy \; 8 \; 2aeyy \; 8 \; 2afxx \; 8 \; aaef \propto aadd$, eadem æquatio cum illâ, quæ construenda proponebatur.

Postquam sic ambæ Curvæ mRn & gRh, quæ ambabus æquationibus indeterminatis singulæ singulis respondent, descriptæ & eidem figuræ adaptatæ fuerint, manifestum est, punctum ipsarum commune R, in quo se mutuò intersecant, utrique simul satisfacturum esse, ipsumque adeò Problema per illud penitùs determinatum iri. Quocircà demissâ ex hoc puncto in basin trianguli perpendiculari RF, si huic æqualis abscindatur AD, erunt puncta D & F talia, ut si per illa ducantur rectæ DE, FG, triangulum datum seorsim bisecantes (quod quomodo fiat, in vulgus notum est) illud simul & quadrisecent, & se mutuò ad angulos rectos secent; quod initiò faciendum proponebatur.

Quòd si Curvæ intrà angulum rectum gCh nullibi se mutuò secuerint, nullam quoque illo casu Problema solutionem admittet: sic ut hinc totam Problematis naturam, possibilitatem, limites, determinationes & casuum varietates, uno quasi obtutu perspicere liceat; quod ex aliâ constructione methodo Auctoris investigatâ difficulter cognosceretur.

Pag. 11. §. Primò autem, *& Pag.* 24. §. Cæterùm.

AUctor subinde confundere videtur duplicem Curvarum respectum, juxtà quem considerari possunt Curvæ, quatenùs vel *per ipsas alia*, vel *per alias ipsæ* construuntur; unde non satis sibi constat in distinguendis per certa genera Curvis, illasque quas modò ad diversa Linearum genera retulit (quòd diversorum graduum æquationes *per ipsas* possent construi) mox iterum sub eodem gradu complectitur, quoniam ipsas vicissim *per eandem* construi posse animadvertebat. Quod ex pag. 11. sic ostenditur: Cùm quæstio Pappi in 12 lineis est proposita, pervenitur ad æquationem sex dimensionum; & cùm in lineis 16, ad æquationem dimensionum octo, monente Auctore p. 25. Sed æquationes sex dimensionum ab ipso construuntur ope Curvæ, quæ ad Cubum adscendit, lib. 3tio p. 97. pariterque æquationes octo dimensionum possunt construi per aliam, quæ assurgit ad Quadrato-quadratum. Quare cùm ad construen-

ſtruendum Problema in 16 lineis, Auctor requirat pag. 11. Curvam *uno gradu* altiorem illâ, quâ conſtruitur in lineis tantùm 12, omninò colligendum videtur, quòd illi propoſitum fuerit Curvas Cubicas & Quadrato-quadraticas ad duo diverſa Linearum genera vel duos differentes gradûs referre. Quemadmodùm etiam concludi poteſt ex eo, quod habetur pag. 23. *§. Quòd ſi*, ubi curvam E C, quæ per interſectionem Regulæ G L, & lineæ C N K deſcribitur, perpetuò diverſi ab hâc generis eſſe innuit, cùm tamen ex calculo facilè appareat, æquationem Curvæ E C nunquam plus unâ dimenſione ſuperaturam æquationem Curvæ C N K; adeò ut & hinc ſequatur, Curvas ex gr. trium & Curvas quatuor dimenſionum ad duo diverſa Linearum genera referendas eſſe. Et tamen ipſemet Curvas iſtas in paragr. ſtatim ſubſequentibus non obſcurè, imò libro 2do p. 21 & 24, alibique diſertis verbis ſub eodem gradu complectitur; ſicut etiam illas Curvas, quæ ad Surde-ſolidum & Quadrato-cubum adſcendunt, promiſcuè eidem Curvarum generi includit.

Ut itaque in re dubiâ certi quippiam ſtatuatur, conſultum fuerit Curvas ita diſtinguere, ut ipſarum gradûs æſtimentur ex numero dimenſionum, ad quas aſcendunt æquationes ipſarum naturam exprimentes; quo pacto Conchoidem Veterum Sectionibus Conicis non uno tantùm, ut facit Dnus Des-Cartes p. 24, ſed duobus gradibus altiorem conſtituimus, propter quatuor dimenſiones, quas hujus Curvæ æquatio acquirit, ut ex Comment. apparet pag. 250. Nec ut aliter ſtatuamus, perſuadere nobis poteſt ratio ab Auctore allata pag. 24, dum regulam dari aſſerit, quâ ad Cubum reducantur omnes difficultates, quæ adſcendunt ad Quadrato-quadratum, & ad Surde-ſolidum omnes illæ quæ adſcendunt ad Quadrato-cubum; alludens procul dubio ad id, quod lib. 3tio pag. 79 oſtendit, ubi æquationem biquadratam in duas quadratas reſolvere docet, quarum ſecundi termini per æquationem cubicam inveniantur. Etenim ſi mens Auctoris hæc ſit (nec liquet quæ alia eſſe poſſit) Curvas quatuor dimenſionum Curvis trium propterea non eſſe dicendas magis compoſitas, quòd illæ poſſint conſtrui inveniendo tantùm radicem alicujus æquationis trium dimenſionum, ſequetur, quòd Curvæ etiam quammaximè compoſitæ ſæpenumerò ejuſdem generis habendæ cum ſimpliciſſimis; quotieſcunque enim quantitatum indeterminatarum altera unam

tantùm duasvé in æquatione dimensiones obtinet, sumptâ ad libitum alterâ, quæ plurium dimensionum fuerit, possunt Curvæ puncta per solam regulam & circinum inveniri; adeò ut si constructionis simplicitas attenderetur, ejusmodi Linea cum primi gradûs Curvis connumeranda foret. Deinde notandum est, per accidens tantùm fieri, ut Æquatio Biquadrata p. 79. ad unâ dimensione minorem sive Cubicam reducatur, nec propterea in Quadrato-cubicâ, ut Auctor existimat, pariter procedere debere; utpote quam eo sensu non ad Surde-solidam, sed ad Æquationem 15 aut 10 dimensionum perduxit Huddenius lib. 1. de Red. Æquat. p. 488 & 489.

Pag. 11. *§. eod. sub fin. ad verba*: Excepto in 13. *& Pag.* 106.

QUoniam Auctor in omnibus suis constructionibus Circulum adhibuit, qui Locus est duarum tantùm dimensionum, hinc factum, ut per Curvas cujusque gradûs construere potuerit duntaxat Æquationes duplò plurium dimensionum, quàm sunt illæ, quibus earundem Curvarum natura exprimitur. Cùm tamen ostensu perfacile sit, quòd cujuslibet generis Curvæ aptæ sunt ad construendas Æquationes tot dimensionum, quot indigitat quadratum numeri dimensionum, ad quas adscendunt æquationes curvarum illarum naturam exprimentes. Ita per Curvas trium dimensionum construi possunt non solùm Æquationes bis trium seu sex, sed ter trium seu 9 dimensionum, quales Authori non possent construi nisi ope Curvæ 5 dimensionum, ut ex loc alleg. colligitur. Etenim si proponantur duæ Æquationes indeterminatæ, putà $aay \infty x^3$, & $y^3 \infty bbx + c^3$; in quarum unâ y sit unius tantùm & x trium dimensionum, in alterâ verò & y dimensionum totidem, atque valor ipsius y juxtà priorem æquationem inventus substituatur in alterâ, manifestum, quòd resultans Æquatio $x^9 \infty a^6bbx + a6c^3$, futura sit ter trium seu novem dimensionum, quæ per consequens mediantibus duabus Curvis, quibus duæ illæ indeterminatæ æquationes 3 dimens. respondent, construi poterit; adeò ut si peccatum sit censendum in Geometriâ (quod alicubi appellat Auctor) ad ejus constructionem Curvam magis compositam adhibere, ipsemet

met ab ejus labe haudquaquam immunis pronunciari possit, (de quibus fusiùs in Act. Lipf. 1688. m Jun. p. 329.) Id vitii jam olim animadverterat præclarus Geometra Gallus Fermatius, & post ipsum Hirius in Tractatu de Constructionibus Æquationum, ubi nobiscum agnoscit quòd per Curvas trium dimensionum Æquationes ad 9 usque dimensiones construantur, in eo tamen non minùs culpandus, quòd pro æquationibus altioribus, propriæ suæ in Dnum Des-Cartes strictura velut oblitus, etiam num ipse Curvas justo altiores adhibet, & verb. gr pro construendâ Æquatione dimensionum 16, quæ juxtà Regulam nostram ope duarum Curvarum 4 dimensionum construitur; Curvam 5 dimensionum requirit; quod equidem propterea facere coactus fuit, quia pro Curvarum alterâ perpetuò talem selegit, quæ æquatione *duobus tantum terminis* constante exprimitur (quemadmodùm Dno Des-Cartes erroris ansa fuit, quòd pro illâ Curvam *duarum tantùm dimensionum* sive Circulum adhibuit.) Nam si pro utrâque tales assumantur Curvæ, quæ æquationibus exprimuntur ejusdem quidem gradûs, at plurium vel si opus sit omnium terminorum, nil obstare video, quò minùs per illas Æquatio proposita, etiamsi completa fuerit, construi possit: quoniam duæ ejusmodi Æquationes locales plures simul differentes terminos complectuntur, ut facilè ostendi potest, quàm Æquatio proposita determinata comprehendit; adeoque omnes quantitates cognitas, quæ in propositâ occurrunt, includere possunt. Sic duæ æquationes locales completæ decem dimensionum plures simul continent differentes terminos, quàm æquatio determinata & completa 100 dimensionum continet; quod sufficit ad ostendendum, constructionem æquationis completæ 100 dimensionum per duas 10. dim. non esse impossibilem. Differentes autem voco terminos æquationum localium, in quibus altera velutraque indeterminatarum literarum x & y diversum numerum dimensionum habet, ut $axyy$, bxy^2, $cxxyy$, qui tres differentes termini sunt.

Pag. 18. lin. 7. à fin. Verum enimverò, *& P. 38. 5.* Ac proinde.

SPiralis, Quadratrix, Cycloïs, aliæque ejusmodi Curvæ, quæ non sunt Algebraicæ, hoc est, nullis æquationibus Algebraicis certi &

definiti gradûs possunt exprimi, sed omnes æquationum gradûs quasi transcendunt, *transcendentales* inde appellatæ, ab Authore nostro in suâ Geometriâ non potuerunt non negligi, quoniam earum tractatio hujus regulis haudquaquam subjacet, sed reconditioris cujusdam Geometriæ fundamentis innixa est. Idem tamen interim jure vapulat Cel. Geometræ Leibnitio, quòd Curvas istas propterea è censu Geometricarum Linearum eliminaverit; cùm non tantùm plurimas magni momenti proprietates possideant, nullatenùs cedentes iis, quibus cæteræ gaudent, sed eas etiam verè geometricas exactéq; demonstrabiles. Cui non obstat, quòd motûs quibus describuntur, nullam inter se relationem habeant, quæ exactè mensurari possit; quandoquidem ob hanc rationem potiùs ex Mechanicâ repudiandæ forent, quæ describendis seu construendis magnitudinibus occupatur, quàm ex Geometriâ quæ jam positarum & descriptarum affectionibus demonstrandis potissimùm insumitur. Ut ipse aliàs initio lib. 2[di] contrà Veteres argumentatus est Auctor, qui plerasque etiam Algebraicas è Geometriâ exclusas voluerunt.

Pag. 39. *S.* Quemadmodùm.

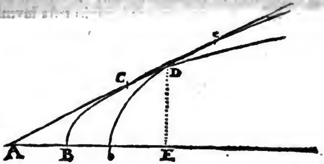
POpularis fuit antehàc Geometrarum error, existimantium recti & curvi tam disparem esse naturam, ut ratio unius ad alterum ab hominibus nullo modo cognosci aut comprehendi valeat. Quibus hîc assentire videtur sagacissimus Auctor noster, mutaturus haud dubiè sententiam, si paucis annis fato suo supervixisset. Paulò enim post ejus obitum Heuratius Batavus, (quanquam primæ inventionis gloriam Nelio suo tribuant Angli) Curvæ æqualem rectam assignavit, editâ anno 1659 ad Schootenium Epistolâ, quæ ad calcem pr. part. hujus Geometriæ adjecta legitur. Ab illo verò tempore infinitæ aliæ diversorum generum Curvæ modernorum industriâ rectificationem nactæ sunt.

Pag. 40. *S.*K. *Pag.* 244. *& Pag.* 262. *cum seqq.*

MEthodus hæc, quâ Auctor ad inveniendas Curvarum datarum perpendiculares seu tangentes, Schootenius etiam ad Maximi & Minimi determinationem utitur (quæque in eo consistit, ut duæ radices æquales in æquatione concipiantur,) ad plura quoque alia Problemata, si dextrè tractetur, adhiberi poterit, ad

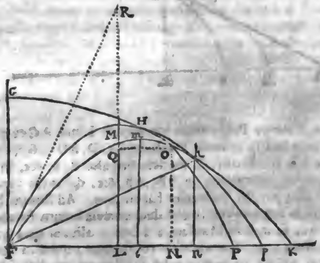
quæ

quæ aliàs Geometriam hanc haud facilè extendi posse quis existimet. Et ne repetamus ea, quæ passim in Actis Lipſ. m. Jan. & Mart. 1692. m. Jun. 1693. & m. Octobr. 1694. hanc in rem publicata prostant, lubet tantùm uno alteròve exemplo ostendere, quo pacto nonnunquam eâdem methodo ex datâ tangentium non modò rectarum ſed etiam curvarum conditione ipsa viciſſim propoſita Linea inveniri debeat.



Exemp. primum: Proponatur invenienda Linea A C c, quæ tangat vel tangatur ab infinitis Parabolis B C D, b D c, &c. ſuper eodem axe A E conſtitutis, & vertices ſingulos B, b, &c. in ſingulis axis punctis, parametrosque A B, A b, &c. diſtantiis verticum ab extremo ejus puncto A æquales habentibus. Ad lineam hanc inveſtigandam cogitabimus, quòd duæ quævis harum Parabolarum, ut B C, b c, ſe mutuò interſecare debeant alicubi citrà quæſitam Lineam A C c; indeque viciſſim colligemus, quòd ex quovis citrà lineam A C c dato puncto velut D, duæ ejuſmodi Parabolæ, inflecti poſſint, quæ Parametros habeant verticum ſuorum diſtantiis ab A æquales, ſed eò futuræ ſibi propiores, quò punctum D quæſitæ lineæ A C c propiùs aſſumptum fuerit, ita quidem ut ſi hoc in ipsâ lineâ A C c accipiatur (rectis A E, E D coordinatis ejus exiſtentibus) ambæ Parabolæ prorſùs ſint coàlituræ, junctis in communi puncto verticibus earum B & b, ipſaque tum æquatio ab A B vel A b denominata duas æquales radices habitura; unde deinceps in Problemate pergere non erit difficile: Poſitis enim AE ∞ x,

$ED \infty y$, AB vel $Ab \infty s$, adeoque BE vel $bE \infty x - s$, habebitur ex naturâ Parabolæ rectang. ABE vel AbE seu $xs - ss \infty yy$ seu EDq, ordinatâque æquatione à literâ s, $ss - xs + yy \infty 0$, quæ terminotenùs comparata cum æquatione duarum radicum æqualium $ss - 2es + ee \infty 0$, dabit $y \infty e$, & $x \infty 2e$, ac proinde $x \infty 2y$, quod indicat Lineam quæsitam A C c rectam esse, rationemque abscissæ ad applicatam constanter duplam. Addimus, quòd tametsi loco simplicium Parabolarum, proponatur series Paraboloïdum vel Cubicorum vel Biquadraticorum, vel cujusvis altioris gradûs, Linea ipsas omnes tangens nihilominùs recta invenitur, ratione tantùm inter abscissam & applicatam variante.



Exemp. sec.: Sit porrò invenienda Curva GHhK, quæ tangat omnes Parabolas, quas globi bellici in singulis mortarii elevationibus ex puncto F constante vi explosi describunt. Ad hujus Problematis solutionem ex arte Balisticâ ut demonstratum supponimus, quòd globi vi nitrati pulveris projecti aut missilia quævis in aëre Parabolas describunt, quarum altitudines suprà planum horizontis sint in duplicatâ ratione sinuum angulorum elevationis tormen-

tormenti. Quo posito considero, quòd duæ quævis harum Parabolarum FMP, Fmp, quæ curvam quæsitam tangunt in H & h, sese necessariò alicubi intrà eandem secent; adeoque etiam reciprocè, quòd ex quovis intrà illam dato puncto, velut O, duæ diversæ Parabolæ duci possint, quæ præscriptam tangant, præterquàm quando punctum O in ipsâ curvâ GHK assumptum fuerit; quo casu ambæ Parabolæ in unam coalescent, æquatis earum tum amplitudinibus FP & Fp, aut amplitudinum semissibus FL & Fl, tum altitudinibus LM & lm. unde rursùs calculum prosequi non arduum erit. Esto namque altitudo jactûs perpendicularis FG $\propto a$, FL $\propto s$, LM $\propto t$, FN $\propto x$, NO $\propto y$, & ducatur FR tangens Parabolam FMP in F & occurrens axi LM in R; fietque propter Parabolam LR $\propto 2t$, & FR $\propto \sqrt{ss+4tt}$: quare cùm tangens FR repræsentet lineam directionis mortarii seu globi eo momento, quo ex mortario egressus Parabolam describere incipit, erit per Lemma præsuppositum FG ad LM, seu a ad t, ut quadratum sinûs totius FR ad quadratum LR sinûs anguli LFR, sive ut $ss+4tt$ ad $4tt$; unde manat $ss \propto 4at - 4tt$, æquatio prior, quæ positionem curvarum FMP, Fmp determinat. Rursùs ut LM ad QM sive t ad $t-y$, ita FLq ad QOq, h. e. ss ad $xx-2xs+ss$; ac proinde $yss - 2txs + txx \propto 0$, æquatio altera, quæ naturam Parabolarum respicit. Harum duarum æquationum beneficio eliminetur alterutra lit. s vel t, putà t, ut habeatur æquatio $ss \frac{-x^3 s - 2axys + axxy + \frac{1}{4}x^4}{xx+yy} \propto 0$, in quâ quia litera s duos æquales valores habere concipitur, comparetur ipsa cum æquatione $ss - 2es + ee \propto 0$, ut suprà; vel quia æquatio duarum duntaxat dimensionum est, quærantur per doctrinam p. 7. ejus ambæ radices, nempe $s \propto \frac{\frac{1}{2}x^3 + axy + \& - xy\sqrt{aa - ay - \frac{1}{4}xx}}{xx+yy}$, quæ cùm æquales esse nequeant, nisi quantitas post signum radicale evanescat, sequetur $aa - ay - \frac{1}{4}xx \propto 0$, quod arguit lineam quæsitam GHK itidem Parabolam existere, cujus vertex G, axis FG, basis FK dupla FG, & latus rectum ipsius FK duplum.

Notandum hîc primò, quòd si infinitæ hæ Parabolæ, quarum communis tangens quæritur, aliam quamcunque positionem habere concipiantur, verbi gr. talem, ut ipsarum vertices existant in

 lineâ

lineâ rectâ, aut in circumferentiâ circuli, aut in aliâ quâvis curvâ datâ, prior tantùm duarum præcedentium æquationum $ss \propto 4as - 4ss$ variabit; præterquàm cùm sunt in Ellipsi, cujus axis minor FG majoris est semissis; quoniam enim ipsa hæc Ellipsis æquationis nostræ Locus est, non differet eo casu Parabolarum positio à præsente. Si verò quæstio proponatur etiam in aliis curvis quàm Parabolis, tunc & altera æquatio variabit; adeò ut hinc generaliter constet, quo pacto quibuslibet lineis positione datis, alia invenienda sit Linea, quæ ipsas omnes tangat, vel ab iis tangatur.

Deinde etiam sciendum est, quòd idem Problema sub aliâ adhuc formâ proponi possit hunc in modum: Quæritur, qualis sit Curva, quæ jungit omnia puncta G, h, K, eorum quæ globi ex F constante vi explosi in planis acclivibus FG, Fh, FK, attingere possunt remotissima. Problematis enim hujus identitas cum præcedente hinc patescit, quòd ductâ Parabolâ Fmhp, quæ curvam suprà repertam GhK tangat in ipso puncto h, in quo eam secat planum Fh, omnes aliæ ex F eductæ Parabolæ curvam GhK alibi quàm in puncto h tangere debebunt, proindeque cùm totæ intrà eandem jaceant, planum Fh necessariò citrà punctum h secabunt. Quæ quidem consideratio hunc usum præbet, ut inveniri possit angulus elevationis mortarii, è quo jactus globi in dato plano inclinato Fh fiat omnium longissimus; uti maximum esse constat in plano horizontali FK, si fiat explosio sub angulo 45. gr. id quod in re militari usum quandoque non contemnendum habere potest. Etenim cùm ob angulum datum nFh, nota sit ratio lateris Fn ad nh seu x ad y (quæ ponatur ut a ad b) habebitur $ay \propto bx$, quod substitutum in æquatione $s \propto \frac{\frac{1}{2}x^3 + axy}{xx + yy}$, valorem unius radicum æqualium ipsius s denotante, gignit $s \propto \frac{\frac{1}{2}aax + aab}{aa + bb}$; in æquatione verò $aa - ay - \frac{1}{4}xx \propto 0$ suffectum exhibet $\frac{1}{4}xx \propto -bx + aa$, ac proinde $\frac{1}{2}x \propto -b + \sqrt{aa + bb}$; quo valore porrò surrogato in æquatione modò inventâ $s \propto \frac{\frac{1}{2}aax + aab}{aa + bb}$, habebitur $s \propto \frac{aa}{\sqrt{aa + bb}}$, & hoc denique substituto in æquat. $ss \propto 4as - 4ss$ ad habendum $2s$, fiet $2s \propto a + \frac{ab}{\sqrt{aa + bb}}$.

Quare

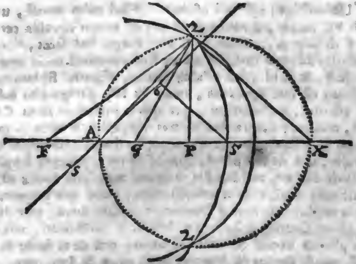
Quare tandem cùm FL seu s sit ad LR seu $2t$, hoc est, $\frac{aa}{\sqrt{aa+bb}}$ ad $a + \frac{ab}{\sqrt{aa+bb}}$, ut sin. tot. a ad tang. ang. LFR, erit tangens ista $b + \sqrt{aa+bb}$. Quod innuit, tangentem anguli quæsitæ elevationis mortarii esse aggregatum tangentis & secantis anguli inclinationis dati plani nFh, quod investigandum erat.

Pag. 44. *ad verba*: Tangat ibidem curvam lineam CE, nec ipsam secet.

Subintellige: *nisi fortè osculetur.* Fieri enim potest, ut recta PC curvæ perpendicularis sit, & tamen circulus centro P per C descriptus, curvam in C non tangat sed secet, nempe si concursui duarum intersectionum sive contactui tertia intersectio accesserit, & sit id quod *Osculum* dicitur, effecerit. Eâdem cum restrictione est intelligendum, quod in seq. paragrapho habetur, ubi asseritur, æquationem, per quam invenitur linea CM vel MA, continere debere duas radices inæquales, si circulus curvam lineam in C secet: hoc enim tantùm de simplici curvarum sectione valet, non de compositâ, quæ ex trium pluriumvè simplicium concursu côaluit, totidemque radicum æqualium index est. Neglexit verò Auctor hanc restrictionem, quòd ejus tempore nihil adhuc expliciti de naturâ Osculorum notum fuerat, quæ demùm acutissimo Geometræ Leibnitio distinctiùs considerari, mox etiam aliis pleniùs excuti & ventilari cœpit; quâ de re fusiùs in Actis Lips. menss. Jun. 1686. Mart. & Sept. 1692. & Jun. 1693. Interim tamen verum est, hâc animadversione non everti fundamentum methodi Auctoris, quippe quod in eo tantùm positum est, ut cùm recta PC curvæ perpendicularis est, saltèm duæ radices æquales in æquatione adsint: adsunt autem hæ, sive circulus tangat curvam sive osculetur; cùm tres pluresvè radices æquales duas non excludant sed includant.

Pag. 52 & 170. ad lit. OO.

QUoniam non definitum nec demonstratum extat, in quem Circulum transeat secunda hæc Ovalis, quando FA, AG, & 5A, A6, in eâdem ratione sunt; utrumque hic loci supplebimus: utemur autem signo :: ad indigitandam proportionalitatem quatuor magnitudinum, quibus interseritur, ut discursum utcunque contrahamus.



In rectâ FG abscindatur ad partes G recta AX, quæ sit quarta proportionalis ad AF — AG, AG, & 2FA, ductisque ad commune punctum 2 curvæ A2 rectis F2, A2, G2 & X2, demittatur ex illo perpendicularis 2P. Quo facto, cùm A5. A6 :: [a] AF. AG, erit permutando A5. AF :: A6. AG (seu [b] AS), componendoque F5. AF :: 56. AG, hoc est, [b] F2. AF :: G2. AG. Quare tum angulus F2G [c] bisectus est per rectam A2, tum etiam ▭ F2G. ▭ FAG :: [d] □ F2. □ FA; unde dividendo ▭ F2G — ▭ FAG (sive [e] □ A2). ▭ FAG :: □ F2 — □ FA. □ FA, rursumque permutando □ A2. □ F2 — □ FA :: ▭ FAG. □ FA :: [f] AG.

a per hyp.
b per 7 quinti
c per 3 sexti.
d per 22 sexti.
e per Theor. p. 11. cofl. Geom. pag. 170.

[f] AG. AF, & convertendo □A2. □F2—□FA—□A2 (sive [g] 2▭FAP) :: AG. AF—AG :: [h] AX. 2FA :: [f] ▭XAP. ▭2FAP. Quocircà ▭XAP ∞ [i] □A2, ac proinde XA. A2 :: [k] A2. AP, hoc est, in Triangulis XA2, 2AP, latera circà communem angulum A sunt proportionalia. Ergò [l] Triangula similia. Ergò cùm angulus ad P sit rectus, erit etiam angulus A2X rectus; igitur [m] in semicirculo. Peripheria ergò circuli est Curva A2X, ejusque diameter recta AX. Quod determinandum demonstrandumque erat.

f per 1 sexti.
g per 12 secundi.
h per constr.
i per 9 quinti.
k per 17 sexti.
l per 6 sexti.
m per 31 tertii.

Pag. 55. *lin.* 11. Quòd si verò &c.

Quòd positis A5 & A6 lineis æqualibus, Ovalis primi & tertii generis abeat in Lineam rectam, secundi in Hyperbolam, quarti in Ellipsin, ita facilè ostenditur: Quia per constr. AR vel AS ∞ AG vel AH, & per hypoth. A6 ∞ A5, erit dempris additisvé æqualibus, *In I & III Ovali:* R6 vel S6 ∞ G5 vel H5; quare circulus centro G vel H radio R6 vel S6 descriptus alterum centro F per 5 descriptum in ipso puncto 5 continget. *In II Ovali:* S6 (hoc est, per constrúct. G2) ∞ AG + A5; & *in IVta*, R6 sive H4 ∞ AH—A5; utrobique verò F5, hoc est, F2 vel F4 ∞ FA + A5. Unde patet differentiam rectarum F2, G2, differentiæ ipsarum FA, GA; nec non summam F4 + H4, summæ FA + AH æquari. Constat autem aliunde, illam *Hyperbolæ*, hanc *Ellipseos* proprietatem existere.

Pag. 65. *lin.* 5. Et denique si AM.

Quoniam enim per hyp. $d-e$ est ad e, sicut g ad AM seu x, erit componendo d ad e, sicut $g+x$ ad x, hoc est, sicut differentia rectarum GC & GA ad AM; ac proinde per naturam harum Ovalium AM sive AH — HM debet etiam æquari differentiæ ipsarum AH & HC, hoc est, HC debet esse ∞ HM, quod fieri nequit, nisi focus H infinitè distet à puncto C vel M, lineaque CH ipsi AM parallela fiat; quo casu curvam AC Hyperbolam evadere constat per ea, quæ pag. 274. à Schootenio demonstrata sunt. Idem etiam simili modo de alterâ curvâ CY ostenditur. Quòd si verò linea AM major minorvé inveniatur quàm $\frac{ge}{d-e}$, haud absi-

mili ratiocinio colligitur, focum H finito intervallo à puncto C vel M ad dextram sinistramvé ejus statuendum esse, quod arguit curvam A C primi tertiivé generis Ovalem esse, planè ut Auctor asseruit.

Pag. 65. *§.* Possem quoque.

SUperflua hæc est limitatio Auctoris; potest enim Problema generaliter confici, qualiscunque sit data vitri superficies, ut benè animadversum ab Ill Hugenio in Tractatu de Lumine pag. 113. Quemadmodùm etiam circà totam materiam opticam, quæ in hoc secundo libro pertractatur, multò universaliora nunc detecta habentur, postquàm à Geometris præter puncta solitaria, quæ Focos appellârunt, integræ cœperunt considerari Lineæ, à radiorum reflexorum & refractorum concursibus formatæ, quas Cel. Dn. Leibnitius appositè Focos Lineares, alii Causticas ac Diacausticas nuncupare solent. De harum Linearum affectionibus legi merentur ea quæ passim in Actis Erud. Lipf. prodierunt, præsertim quæ habentur mensf. Maj. & Jun. *1692* & *1693*, ubi non tantùm fundamentum omnium Ovalium Cartesianarum exponitur, & reliquorum inventorum fons aperitur, sed & plurima alia scitu jucunda atque utilia exhibentur. Quomodo verò etiam præsentis Problematis constructio ex iisdem possit elici, haud obscurum est, si consideremus, illo nihil aliud præcipi, quàm ut datâ lineâ curvâ reperiatur alia, cujus Diacaustica ex dato puncto conveniat cum datæ Diacausticâ ex alio dato puncto. Quod consequi poterimus, si quæramus priùs Curvam, cujus Evoluta (hæc autem quid sit, ibi vide) conveniat cum Diacausticâ datæ curvæ ex dato puncto, & deinde illâ mediante aliam, cujus Diacaustica ex altero dato puncto cum inventæ Evolutâ coïncidat. Quorum utrumque per ibi tradita facillimo negotio effectui dare licet, modò datæ curvæ rectam perpendicularem inveniri posse concedatur.

Pag. 67. *§.* Tametsi.

SI solâ Dni Des-Cartes auctoritate standum sit, è pluribus Curvis, per quas aliquod Problema construi potest, semper illa eligenda venit, quæ generis est simplicissimi; ut maximè constru-

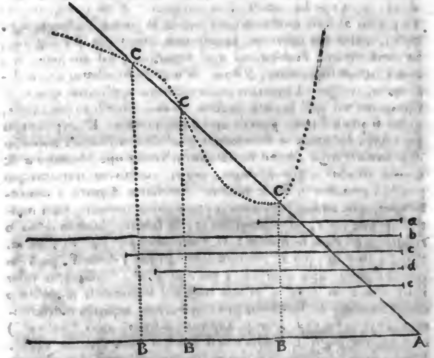
ctionem

ctiorem & demonstrationem Problematis multò impeditiorem reddat, quàm alia, quæ uno alterové gradu magis composita est. At si asserti rationes desideremus, altum silentium. Et sanè, cùm totum negotium geometricum vel manuum vel mentis operatione absolvatur, illa constructio omnium optima censebitur, quæ utramque præ cæteris facilitat: quicquid sit de curvæ genere graduvè, cujus ope hæc constructio peragitur. Nam quanquam curva gradûs altioris quiddam fortè habeat in naturâ suâ magis compositi, quàm alia inferioris, ratiocinium tamen quo id colligimus, in constructione Problematis non attenditur, sed tanquam jam anteà factum supponitur; & nunc solummodò spectatur curvæ descriptio, ejusque ad optatam constructionem applicatio, quæ nonnunquam vel ipso fatente Auctore facilior simpliciorque existit, quàm si alia inferioris generis curva assumeretur. Exemplum ejus rei illustre habemus in Problemate *Quadrisectionis Trianguli Scaleni per duas normales rectas*, quod suprà construximus ope Hyperbolæ & Curvæ alicujus 4 dimensionum, tametsi duabus curvis trium idem præstari potuisset in hunc modum: Attollatur Æquatio 8 dimensionum, quæ ambas Problematis conditiones includit, factâ multiplicatione per x, ad 9 dimensiones, & sublato secundo termino reducatur ad hanc formulam: $x^9 . * m x^7 . n x^6 . p x^5 . q x^4 . r x^3 . s x x . t x . v \infty 0$; tum sumpto ad lubitum Loco aliquo 3 dimens, putà Parabolâ Cubicâ, quæ exprimitur per $a a y \infty x^3$, substituatur valor iste ipsius x^3 in 5 vel 6 primis terminis æquationis propositæ 9 dimensionum: sic habebitur pro Loco altero æquatio indeterminata $a^6 y^3 . a^4 m x y y . a^4 n y y . a a p x x y . a a q x y . a a r y$ (vel $r x^3$.) $s x x . t x . v \infty 0$, quæ itidem trium tantùm dimensionum existit. Ubi apparet, quòd etiamsi methodus ista resolvendi Æquationem propositam in duo Loca, multories expeditior sit, constructionesque longè faciliores suppeditet illâ, quâ Dn. Des Cartes uti solet, fieri tamen potest, ut factâ substitutione coëfficientium æquationis propositæ loco literarum m, n, p, &c. Locus iste $a^6 y^3$. &c. fiat constructu tam difficilis, ipsaque demonstratio tam impedita & coacta, ut nemo non præferendam videat nostram constructionem, ad quam insuper ipsa Problematis natura sponte quasi nos deduxit, ut maximè 4 dimensionum curvam postulet.

Sed & hoc denique addere non pigebit, quòd si curvarum simplicitati nolumus scrupulosiùs inhærere, possimus unamquamque

æqua-

æquationem generaliter & facillimè constructam exhibere mediante curvâ aliquâ, quæ licèt tot dimensionum sit, quot habet æquatio proposita, ejus tamen omnia puncta per solas lineas rectas inveniri possunt. Modus talis est: Primus æquationis terminus adæquetur reliquis, dein dividatur tota æquatio per potestatem radicis proximè inferiorem maximâ, ut radix ab unâ parte sola ha-



beatur; quemadmodum si proposita sit æquatio $x^5 \infty a x^4 + bb x^3 - c^3 xx - d^4 x + e^5$, fiat divisio per x^4, ut proveniat $x \infty a + \frac{bb}{x} - \frac{c^3}{xx} - \frac{d^4}{x^3} + \frac{e^5}{x^4}$; tum assignato in rectâ indefinitâ AB puncto A abscindatur ex illâ arbitraria AB, quæ vocetur x, & quærantur tertia proportionalis ad hanc x & b, quarta ad x & c, quinta ad x & d, &c. eæque omnes unà cum quantitate a pro signorum + & — varietate sibi mutuò addantur demanturvè, & quæ provenit recta BC normaliter applicetur ipsi AB in puncto B: sic erit punctum C ad curvam desideratam CC. Ductâ enim rectâ AC, quæ cum

cum ipsâ AB angulum semirectum constituat, curvamque in punctis C,C, secet, designabunt demissæ ex illis perpendiculares CB, CB, omnes radices propositæ æquationis: quod ex ipsâ operatione per se manifestum est, quandoquidem recta BC, quatenùs ad curvam applicata est, æquatur per constructionem quantitati $a + \frac{bb}{x} - \frac{c3}{xx} - \frac{d4}{x3} + \frac{e5}{x4}$, eademque quatenùs est subtensa anguli semirecti, æquatur ipsi AB seu x. Sciendum verò etiam est, quòd idem liceat consequi, si loco primi termini æquationis quivis alius cæteris adæquetur. Barrovius celebris Geometra Anglus in Lect. Geom. pag. 145. homogeneum comparationis seu ultimum terminum reliquis adæquare solet. Sed & infinitis propemodùm modis ista variari possunt. Et habent sanè hujusmodi constructiones in limitum, maximorum item & minimorum determinationibus aliisque suos usûs, qui in aliis constructionibus vix locum habere possunt.

Pag. 69. §. Sciendum.

POsset aliquis Tyro vel Tyrone major hic quærere, cur ad explicandam æquationum generationem & naturam quantitates adæquandæ sint nihilo, priusquàm multiplicentur, & cur non potiùs ita statim liceat arguere: Quia $x \propto 2$, iterumque $x \propto 3$, erit factâ multiplicatione æqualium x & 3 per æqualia x & 2, productum $xx \propto 6$; quæ diversa planè est æquatio ab illâ, quæ invenitur multiplicando $x - 2 \propto 0$ per $x - 3 \propto 0$. Ad hunc scrupulum sibi eximendum scire debent Analytices studiosi, rectè quidem colligi hoc ratiocinio, quòd x quà est 3 multiplicatum per x quà est 2, hoc est, xx faciat 6; at sic quantitatem xx spectari ut rectangulum duorum valorum inæqualium, secùs atque accipitur in Æquationibus ex Problematis vel Theorematis alicujus resolutione ortis, ubi semper denotare solet quadratum unius ejusdemque valoris. Quo etiam sensu venit in modo formandi Æquationes, quem hîc præscribit Auctor. Posito namque $x \propto 3$, vel $x - 3 \propto 0$, si multiplicetur $x - 3$ per quamcunque quantitatem, velut per $x - 2$, sequitur productum $xx - 5x + 6$ nihilo æquale fore, cujuscunque valoris ponatur x in quantitate $x - 2$, adeoque terminum xx non minùs ternarii quadratum, quàm

quodvis aliud rectangulum innuere posse. Quod similiter quoque de quadrato binarii est intelligendum, sicubi insuper posuerimus $x \infty 2$.

Pag. 74. lin. 7: Et insuper, ut quantitas cognita tertii termini quadrato semissis secundi major sit.

INter alia, quæ ad Æquationum præparationem ab Auctore requiruntur, ista quoque conditio adjecta est, ut usui postmodùm esse possit in construendâ Æquatione sex dimensionum $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \infty 0$, prout ex seq. pag. 97 & 98 videre est. Etenim si quantitas cognita tertii termini q minor poneretur quàm $\frac{1}{4}pp$ quadratum semissis secundi, fieri posset ut constructio secundùm regulam D^{ni} Des-Cartes instituenda redderetur impossibilis; utpote secundùm quam Parabola describenda est, cujus Parameter sit $\infty \sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$.

Pag. 76. §. Quæ Operatio.

GEneraliter quantitas cognita seu coëfficiens cujuslibet termini æquationis propositæ $x^4 . px^3 . qxx . rx . s \infty 0$, transmutabitur in aliam datam a, multiplicando radices æquationis juxtà doctrinam pag. 75. per $\frac{a}{p}$, si sit coëfficiens secundi termini, quem transmutare velis; aut per radicem quadratam ex $\frac{a}{q}$, si sit coëfficiens tertii: aut per radicem cubicam ex $\frac{a}{r}$, si quarti; aut per quadrato-quadratam ex $\frac{a}{s}$, si quinti; & ita consequenter, si plures termini adfuerint.

Pag. 77. §. Incipio ab ultimo termino.

CUr Auctor divisionem incipere jubeat à fine, ratio est, quia si fieri non possit, tum id plerumque initio statim operationis cognoscitur. Ex. gr. Examinaturus, num æquatio $y^6 -$

$8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$, dividi possit per $yy+8$, divido primùm -64 per $+8$, & habeo -8, factâque per yy multiplicatione $-8yy$, quæ subtracta ex $-124yy$ relinquunt $-116yy$. Hoc verò quia non ampliùs per 8 sine residuo dividi potest, confestim concludo, divisionem per hoc binomium $yy+8$ succedere non posse; quod aliàs facto initio ab y^6 non constitisset, nisi postquàm tota operatio ad finem perducta fuisset.

Pag. 85. *lin.* 14: aut etiam per ipsarum particulam aliquam &c.

QUomodo Problemata Solida per exiguam aliquam portionem Sectionis Conicæ construi possint, cùm Auctor id non exponat, paucis hic indicare operæ pretium duximus: Primò quia data est Sectionis portio, dabitur quoque [1] vertex Sectionis, ejusque Axis, & ab extremitatibus Sectionis demissæ in axem perpendiculares, quarum major vocetur a & minor b. Deinde per regulas Dni de Beaune, quas secundæ parti Geometriæ hujus insertas legimus, quærantur Limites æquationis propositæ, considerando num cadant intrà perpendiculares a & b, necne: nam si intrà illas cadant, hoc est, si uterque limes minor sit quàm a, & major quàm b, perspicuum est æquationem absque ulteriori reductione per regulas, quas hic mox subjungit Auctor, construi posse. At si limitum alteruter vel uterque cadat extrà a & b, sive major sit quàm a, aut minor quàm b, tum perpendendum porrò est, utrùm ab æqualitatis ratione magis minusvé recedant quàm perpendiculares a & b; & si magis, eousque saltem coarctandi sunt, donec ad æqualitatem æquè vel propiùs accedant; quod video variis modis fieri posse: Ex. gr. Esto proposita Æquatio $z^4 * - 463zz + 4980z - 14508 \infty 0$, sitque $a \infty 63$, & $b \infty 28$: Limes æquationis major [2] est $\sqrt{463}$, & minor $\frac{14508}{4980}$; adeoque radices singulæ æquationis minores quàm 22, & majores quàm 2; sed quia 22 & 2 magis recedunt ab æqualitate quàm a & b, seu 63 & 28, constituo inter 22 & 2 tot medios numeros, quot requiruntur, ut bini ipsorum proximi ad æqualitatem æquè vel propiùs accedant, nempe, 22. 10. 5. 3. 2. Quo facto propositam æquationem transponendo & dividendo per z^3 ita reduco, ut habeatur z ab unâ parte sola, putà $z \infty \frac{463}{z} - \frac{4980}{zz} + \frac{14508}{z^3}$; tum pro

[1] P. Mydorg. Conic. lib. 4. prop. 34.

[2] per 1 prop. cap. 7 de Limit. Æquat.

z in denominatoribus pono successivè valores 22. 10. 5. 3. 2. consideroque num valores inde resultantes ipsius z positis majores minoresvé evadant. Et quoniam posito $z \infty 22$, resultans valor minor fit quàm 22; posito verò $z \infty 10$, resultat valor major quàm 10; quemadmodùm etiam posito z æquali uni reliquorum numerorum, valores inde resultantes positis identidem majores fiunt; hinc concludo, inter 22 & 10 necessariò vel unam, vel omnes tres radices cadere; & si una, duas reliquas aut inter 10 & 5, aut 5 & 3, aut 3 & 2 conjunctim contineri, aut prorsùs imaginarias esse. At quoniam omnes hi limitibus intercepti numeri infrà 63 & 28, ceu extremas applicatas datæ particulæ Sectionis Conicæ, consistunt; idcircò priùs ad illas multiplicatione elevandi sunt, juxtà doctrinam pag. 75. faciendo $z \infty \frac{22}{63} y \infty \frac{10}{63} x \infty \frac{5}{63} u \infty \frac{3}{63} t$, vel etiam $z \infty \frac{10}{28} y \infty \frac{5}{28} x \infty \frac{3}{28} u \infty \frac{2}{28} t$, & sic transformando propositam æquationem in totidem alias ab y, x, u & t denominatas, quarum deinde constructiones ope datæ portionis Sectionis Conicæ per regulam pag. 87. seqq. præscriptam ordine tentandæ sunt. Ita hìc per primam obtinebitur unus valor pro y, & per secundam duo valores pro x, quibus cognitis & z innotescet; nec opus est progredi ad constructionem reliquarum æquationum, cùm jam omnes tres radices propositæ æquationis inventæ sint: quanquam etiam ex aliis quandoque circumstantiis haud ita difficulter cognoscatur, quid primò sit tentandum, quid ultimò, ut perpensis iis multum sæpè superflui laboris rescindi possit. Sed succinctior multò fiet tota hæc operatio, si proposito adhibeamus ea quæ habentur in Act. Erud. Lips. m. Sept. 1689. ubi modus docetur non inelegans appropinquandi continuè radicibus Æquationum per solas rectas lineas & circulos, quantum quis proximè voluerit. Postquam enim hujus methodi ope limites radicum sufficienter coarctati, ipsaque æquatio si opùs sit convenienti multiplicatione radicis in aliam transformata fuerit, poterit ipsa statim beneficio datæ portionis Sectionis Conicæ infallibiliter construi; quorum omnium prolixiori explicatione non indiget, qui præcedentia probè intellexerit.

Pag. 160 *ad exemplum* $z \infty \frac{cd+ef}{g}$.

ALiter hoc ita resolvitur: Fiat ut g ad c, ita d ad quartam h; nec non ut g ad e, ita f ad quartam i, summaque $h+i$ vocetur b, erit $z \infty b$. Vel etiam hoc pacto: Statuatur Triangulum rectangulum, cujus unum crus æquetur mediæ proportionali inter c & d, alterum mediæ inter e & f, & quæratur ad g & hypothenusam trianguli tertia proportionalis, quæ sit b, erit $z \infty b$.

Ibid. ad exemplum $z \infty \frac{acdd - aacc}{d^3 + acd}$.

SChootenius tres proportiones adhibet. Breviùs id per duas proportionalitates obtinetur, faciendo, ut d ad a, ita c ad quartam m; erit $dm \infty ac$, & $ddmm \infty aacc$; unde pro $\frac{acdd - aacc}{d^3 + acd}$ poterit scribi $\frac{d^3m - ddmm}{a^3 + ddm}$ seu $\frac{dm - mm}{d+m}$: quare si fiat denuò, ut $d+m$ ad $d-m$, ità m ad quartam b, erit $z \infty b$.

Pag. 162. *ad exempla* $\sqrt{aa+bb}$ & $\sqrt{\frac{aadd - aaff - a^4}{dd+2df+ff}}$.

PRo *priore quantitate*: Ponatur $\sqrt{aa+bb}$ esse hypothenusa alicujus Trianguli rectanguli, cujus unum crus sit a, & alterum b: vel transmutetur bb in □lum ab, ac deinde inter a & $a+b$ quæratur media proportionalis &c. Ita quantitas $\sqrt{aa-bb}$ considerari potest, vel ut media proportionalis inter $a+b$ & $a-b$, vel ut crus unum Trianguli rectanguli, cujus hypothenusa sit ∞a, & alterum crus ∞b. &c. Pro *posteriore quantitate*: Quæratur per modò tradita $\sqrt{aa+ff}$, quæ vocetur m; ac deinde $\sqrt{dd-mm}$, quæ dicatur n; tandemque fiat ut $d+f$ ad n, sic a ad quartam b, erit $z \infty b$. Ejusdem verò quantitatis constructionem ipse quoque exhibuit Schootenius pag. 153.

Pag. 270. *S.* Ubi notandum.

Rectè hic Commentator, in puncto Flexûs nullam rectam tangere Trochoïdem; quod in omni Flexu contrario verum. Etenim si recta quæpiam infinita tangens curvam, eandemque prætereà secans alibi, ita super illâ rotari concipiatur, ut contactûs punctum totam successivè curvam perambulet, fiet ut contactus iste, qui solus ex duabus intersectionibus coäluit, in puncto Flexûs contrarii tertiæ insuper intersectioni conjungatur, evanescente alterutrâ portionum curvæ, quæ ad easdem rectæ tangentis partes jacuerant; quo fit, ut contactus propriè talis esse definat, inque sectionem transmutetur quæ *osculatio* dicitur. Cui etiam illud consentaneum est, quòd circuli omnes curvam osculantes (osculo ex tribus intersectionibus conflato) curvam non tangunt, sed secant, ut suprà annotavimus pag 441. Nam, quod de universis constat, id speciatim quoque de illo valebit, qui curvam in puncto Flexûs osculatur. Sed hic, cùm perpetuò infinitè magnus esse debeat, ut ex loc. Act. Lips. ibid. allegat. apparet, à Lineâ rectâ osculante non differt; quæ proinde & ipsa curvam secare, non tangere censenda est Et quemadmodùm osculantes circuli, sic & puncta Flexûs contrarii ob trium intersectionum concursum per tres radices æquales reperiuntur, quod quâ ratione ab Heuratio in Conchoïde sit præstitum, pag. 258 Geometriæ hujus videre est.

Pag. 307 & 308.

Accidit sæpenumerò, ut præstitis iis omnibus, quæ hic fieri jubet Commentator, numerus tamen divisorum utilium per quos divisio tentanda foret, adhuc nimius sit. Id qui cavere velit, poterit radices propositæ æquationis initio statim operationis pluribus aliquot numeris, putà unitate, binario, ternario, denario &c. augere minuerevé, transformatâque æquatione in totidem alias, divisores ex omnibus conspirantes seligere. Nam tum aut nulli conspirabunt; aut si qui conspirant, rarò per illos divisio frustrà tentatur. Rectè autem monet pag. 308 lin. 27. seqq. cujusli-

juslibet æquationis terminum ultimum, quo solo ad hoc negotium indigemus, posse reperiri, ut integrâ æquatione non sit opus. . Hoc enim fit, multiplicando coëfficientes terminorum propositæ æquationis per numeros continuè proportionales ab unitate: videlicet ultimum terminum per unitatem, coëfficientem penultimi termini per numerum quo augere vel minuere volumus radices, coëfficientem antepenultimi per numeri hujus quadratum, sequentis per cubum, & ita deinceps; atque tribuendo productis eadem ubique signa, quæ occurrunt in æquatione datâ, si radices minuendæ; mutando verò illa in locis paribus ab ultimo, si augendæ sint. Aggregatum namque omnium productorum erit ultimus terminus æquationis quæsitæ. Ex. gr. Esto proposita Æquatio: $x^3 - 3xx - 30x + 72 \infty 0$, & explorandum sit, num dividi possit per $x +$ vel $-$ divisore aliquo ultimi termini. Multiplico coëfficientes terminorum retrorsum per 1, 1, 1, 1; per 1, 2, 4, 8; per 1, 3, 9, 27, &c. per 1, 10, 100, 1000. &c. servatis si ita lubet iisdem signis æquationis datæ, productaque omnia ejusdem ordinis addo, hâc ratione:

$+1x^3$	$-3xx$	$-20x$	$+72$	$\infty 0$
1	1	1	1	
8	4	2	1	
27	9	3	1	
1000	100	10	1	
$+1$	-3	-30	$+72$	$\infty +40$
$+8$	-12	-60	$+72$	$\infty +8$
$+27$	-27	-90	$+72$	$\infty -18$
$+1000$	-300	-300	$+72$	$\infty +472$

Sic prodibunt 40, 8, 18 & 472, pro ultimis terminis æquationum, quarum radices unitate, binario, ternario, ac denario minores sunt radicibus æquationis propositæ.

Divisores autem numeri 40 sunt ∞ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.
8 . . ∞ 1, 2, 4, 8.
18 . . ∞ 1, 2, 3, 6, 9, 18.
472 . . ∞ 1, 2, 4, 8, 59, 118, 236, 472.

horum primi unitate aucti efficiunt

tum

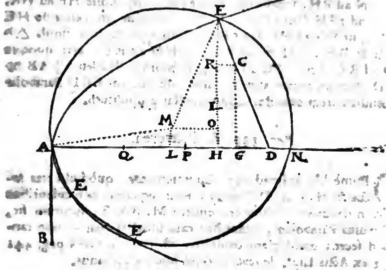
tum +2, 3, 5, 6, 9, 11, 21, 41; tum etiam —0, 1, 3, 4, 7, 9, 19, 39.
secundi binario aucti exhibent
tum +3, 4, 6, 10; tum +1 & —0, 2, 6.
tertii aucti ternario dant
tum +4, 5, 6, 9, 12, 21; tum +2, 1, & —0, 3, 6, 15.
& quarti denique denario aucti gignunt
tum +11, 12, 14, 18, 69, 128, 246, 482; tum etiam +9, 8, 6, 2, & —49, 108, 226, 462.

Qui quidem omnes inter se & cum divisoribus numeri 72 (qui sunt ± 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72) collati ex affirmativis unum senarium, eumque unicum, consentientem habent, ex negativis nullum: unde suspicio est, unam verarum radicum æquationis propositæ esse +6, eamque proinde dividi posse per $x - 6 \infty 0$, quemadmodùm reâpse dividi potest, oriturque æquatio irreducibilis $xx + 3x - 12 \infty 0$.

Pag. 322. ad Problema de Parabolâ.

Cùm non constet, utrùm Problematis hujus constructio & demonstratio Hugeniana aliquando lucem viderit, nec si vidit, omnium manibus teratur; idcircò lubet hîc exponere, qualiter existimemus illam à subtilissimo Viro olim concinnatam fuisse:

Analysis ita habet: Data sit Parabola EAE, cujus vertex A, latus rectum AB, & axis AG, sitque datum intrà extráve illam punctum C, per quod ducere oporteat rectam ECD Parabolæ perpendicularem. Esto hunc in finem demissa ex C in axem normalis CG, & ponatur $AB \infty a$, $AG \infty b$, $GC \infty c$, & $EH \infty x$; adeoque ex naturâ Parabolæ $AH \infty \frac{xx}{a}$, & $HD \infty \frac{1}{2}a$. Quo facto propter simil. $\triangle^{\text{rum}}$ EHD & CGD, erit EH ad HD, sive x ad $\frac{1}{2}a$, ut GC seu c ad GD, quæ sic fiet $\frac{ac}{2x}$; ac proinde $HD - GD$ sive $HG \infty \frac{1}{2}a - \frac{ac}{2x}$, & $AH + HG \infty \frac{xx}{a} + \frac{1}{2}a - \frac{ac}{2x}$, quod, ut apparet, æquatur ipsi b seu AG: unde factâ reductione habetur $x^3 \infty * + abx - \frac{1}{2}aax + \frac{1}{2}aac$. Quæ Æquatio cùm ad pauciores dimensiones deprimi non possit (quod hîc absque ulterio-



ulteriori tentamine ex Regulis Hudden. 12 & 14 colligitur) indicat Problema solidum existere. At quia in quæstionis datis ipsa jam Parabola includitur, poterit illâ mediante constructio solis rectis lineis & circulo absolvi hoc modo:

Constr.: Factâ $GN \infty \frac{1}{2} AB$, bisecetur AN in L; erectâque super axe perpendiculari $LM \infty \frac{1}{4} CG$, describatur centro M radio AM circulus. Hic secabit Parabolam in punctis E, E, E, à quibus ductæ per C rectæ EC Parabolæ perpendiculares erunt.

Demonstr.: Ad hoc synthetice demonstrandum jungantur porrò rectæ AM, ME, & demissâ in axem perpendiculari EH, ductisque axi parallelis MO, CR, bisecetur RH in I, sumanturque in axe $LQ \infty LH$, & $GP \infty GN$. Hine quoniam $AM \infty$ [a] ME, erit quoque AMq ([b] $ALq + LMq$) ∞ MEq ([b] $MOq + OEq$), demtisque æqualibus $ALq - MOq$ seu [c] $LHq \infty OEq - LMq$ seu [c] HOq. Sed $ALq - LHq \infty$ [d] HAQ, & $OEq - HOq \infty$ [d] HEI. Igitur & $HAQ \infty HEI$: unde HA est ad HE (hoc est, ex naturâ Parabolæ HE ad AB) sicut [e] EI ad AQ, & permutando HE ad EI, sicut AB ad AQ. Est verò $AB \infty$ [f] $2GN \infty$ [f]

a Ax. 15.
b 47. 1.
c 34. 1.
d 6. 2.
e 16. 6.
f Constr.

g ax. 1. PN, & AQ ∞ g HN (ob AL ∞ f LN, & LQ ∞ f LH); quare
h 7 & 11. 5. & HE ad EI, sicut h PN ad HN, & convertendo HE ad HI, sicut PN ad PH; sumptisque consequentium duplis HE ad HR,
i 15. 5. ut PN ad 2PH (seu i PG ad PH), iterumque convertendo HE ad RE, ut PG ad HG seu e RC. Cùm ergò propter simil. △la HED & REC, HE sit ad RE, ut HD ad RC; erit quoque HD ad RC, sicut h PG ad RC; ac proinde PG seu f $\frac{1}{2}$ AB ∞
k 9. 5. k HD. Notum autem aliunde, hoc casu rectam ECD Parabolæ perpendicularem existere. Quare constat propositum.

Pag. 339. *S*, Præterea.

Optimè hic animadvertit Commentator, quòd ubi tres rectæ NM, CB, DE omnes sunt æquales, coincidentibus nimirum tribus intersectionum punctis M, B & E, futurum sit, ut Circulus Parabolam, quam hoc casu osculari dicitur, non tangat sed secet; quod planè conforme est iis, quæ suprà pag. 441 & 452 ex Actis Lips. de *contactu Osculi* huc transtulimus.

Pag. 385. *ad lit. F.*

Mysterium hic quærit Schootenii Commentator Bartholinus in eo, quod lapsus tantùm calami fuit in Schootenio. Nescio enim, quâ incuriâ factum, ut vera signa quantitatum BM, HC & 3DE in contextu immutata fuerint. Commentator hoc factum propterea existimavit, quòd aliàs membra negativa prævalerent affirmativis; sed in subjuncto calculo paralogizat, & ex inconsequenti falsum infert. *Inconsequens* est, dum arguit:

	144 *pq*	*major est quàm*	72 *qq*,
auferatur	144 *pp*	*major quàm*	36 *qq*,
relinquetur	144 *pq* — 144 *pp*	*major quàm*	36 *qq*.

Nam 12 major quàm 7, & 10 major quàm 3; nec tamen 12 — 10 seu 2, major quàm 7 — 3 seu 4. Deinde etiam absolutè *falsum* est quod concluditur: *Ergò* 144 *pq major quàm* 144 *pp* + 36 *qq*; quoniam

niam $144pp+36qq$ est summa quadratorum ex $12p$ & $6q$, sicut $144pq$ duplum rectangulum laterum, quod summâ quadratorum perpetuò minus esse constat. Quòd verò $144pq$ hic loci etiam minor sit quàm $144pp+27qq$, adeoque signa perperàm mutata fuerint, sic liquet: Progressu calculi, ut videre est ad lit. D & I, invenitur P A esse ad A Q, sicut $\frac{1}{2}q-\frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q+\frac{7q}{16\sqrt{3}}$; ergò componendo P Q ad A Q, hoc est, q ad p, sicut q ad $\frac{1}{2}q+\frac{7q}{16\sqrt{3}}$: unde $p \propto \frac{1}{2}q+\frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & $pp \propto \frac{241}{768}qq+\frac{7qq}{16\sqrt{3}}$; qui valores in quantitatibus propositis loco p & pp substituti dabunt $72qq+21qq\sqrt{3}$ pro $144pq$, & $72\frac{3}{16}qq+21qq\sqrt{3}$ pro $144pp+27qq$. Sed $72qq+21qq\sqrt{3}$ minor est quàm $72\frac{3}{16}qq+21qq\sqrt{3}$, ut apparet. Quare & $144pq$ minor quàm $144pp+27qq$; quod ostendendum erat.

Pag. 388 *lit. N, ad verba*: Quam quidem radicem.

Etiam hic impingit Commentator. Nam & altera radix $\frac{16842-390\sqrt{785}}{6481}$ major est quàm $\frac{7}{16\sqrt{3}}$. Dicendum fuisset, radicem $\frac{16842+390\sqrt{785}}{6481}$ negligendam esse, quòd major sit quàm 1, quâ minor esse deberet ob SV (*fuq.*) minorem quàm A V (*qu*).

Pag. 422. ad Modum inven. max. comm. Divis.

Modus iste Huddenianus quærendi maximum communem Divisorem duarum quantitatum Algebraicarum reâpse non differt ab illo vulgari, quo Auctor Princ. Math. Univ. ad fractionum abbreviationem utitur Part. II. Geom. hujus in Exemplis pag. 22. & quem in numeris præscripsit Euclides prop. 2. lib. 7. Id quod in præsenti exemplo, ubi calculum secundùm hanc operationem apposuero, palàm fiet: Redactis quantitatibus in

 ordi-

ordinem ſecundùm literam aliquam, velut d, ut habeatur $d^3 - add - 2abd + 2aab$, & $d^4 - \overline{bb - aa},dd + aabb$, divido iſtam, in quâ lit. d plures dimenſiones obtinet, per alteram in quâ pauciores, dicendo: d^3 in d^4 habeo d; quod multiplicatum per diviſorem, & detractum ex dividendo relinquit $ad^3 - \overline{bb + 2ab - aa},dd - 2aabd + aabb$; & quia video literam d etiamnum tot dimenſiones poſſidere in reſiduo quot in diviſore, pergo dividere ad^3 per d^3, ut fiat a, quod in diviſorem ductum & ſubtractum ex reſiduo relinquit $-\overline{bb + 2ab},dd + aabb - 2a^3b$. Hic verò quia lit. d non ampliùs tot dimenſiones habet quot in diviſore, inverto terminos, ponendo diviſorem loco dividendi, & reſiduum loco diviſoris, denuoque divido ita: $-\overline{bb + 2ab},dd$ in d^3 habeo $\frac{d}{-bb+2ab}$, factâ multiplicatione & ſubtractione manet reſiduum $-add + \overline{aa - 2ab},d + 2aab$; & quoniam ſufficientes adhuc dimenſiones adſunt literæ d, pergo dicere: $-\overline{bb + 2ab},dd$ in $-add$ dat $\frac{-a}{-bb+2ab}$, factâ operatione reſtat $\overline{aa - 2ab},d - a^3 + 2aab$. Hoc jam propter d unius dimenſionis pono loco diviſoris, ſicut $-\overline{bb + 2ab},dd + aabb - 2a^3b$ loco dividendi, atque dico: $\overline{aa - 2ab},d$ in $-\overline{bb + 2ab},dd$ invenio $\frac{-bbd+2abd}{aa-2ab}$ &c. remanetque $\overline{-abb + 2aab},d + aabb - 2a^3b$, quod rurſus diviſum per $\overline{aa - 2ab},d$ &c. in quotiente exhibet $\frac{-abb+2aab}{aa-2ab}$, remanetque nihil. Unde colligitur, propoſitas quantitates compoſitas eſſe, earumque maximam communem menſuram haberi, ſi per denominatorem ultimi quotientis $aa - 2ab$ dividatur ultimus diviſor; qui quidem ipſemet optatus diviſor eſſet, ſi quotiens quantitas integra fuiſſet. Quòd ſi quis hanc operationem cum Huddenianâ conferre non pigratus fuerit, eadem ferè in utrâque veſtigia deprehendet.

Pag. 424. lin. 15. ad verba: Excepto tantùm.

RECtè hic obſervat Ampliſſ. Dn. Huddenius, fieri quandoque poſſe, ut duæ quantitates habeant communem diviſorem, etiamſi is per literam aliquam, eo modo qui hic docetur, inveniri nequeat. Id enim tum fit, cùm litera illa, quæ tanquam inco-

incognita spectatur, in communi divisore non reperitur; quemadmodùm hîc b non reperitur in $d - a$: quo casu, priusquàm concludatur, non dari duarum quantitatum seu æquationum communem divisorem, videndum est, num termini cujuspiam ad arbitrium sumpti cognita quantitas, aut quantitatis divisor aliquis utramque æquationem tollat, nam si non tollit, neque etiam per Reg. Hudden. coṁunis divisor invenitur, tum demùm certum fit, planè nullum dari. Verum quidem est, aliud hîc criterium proponi quo id cognoscatur: sed cespitavit Auctor falsâ nixus hypothesi, quòd valor alicujus quantitatis expressæ per fractionem, cujus numerator & denominator per determinationem quandam nihilo æquales fiunt, inveniri nequeat. Et quanquam post revisionem horum ipsemet errorem correxerit in peculiari schedâ ad calcem pr. part. Geom. subnexâ, restringendo assertum ad illas tantùm fractiones, quarum ambo termini per eandem quantitatem sunt indivisibiles; frustranea tamen hæc videtur esse limitatio: quandoquidem omnis fractio quæ terminos habet nihilo æquales, si rationalis est, illos quoque habet communiter dividuos: & si irrationalis est, quanquam terminos habeat communiter individuos, valorem tamen habet omninò definitum & determinatum, non secùs ac rationalis quæpiam fractio.

Sed quia non facilè apparet, quo pacto valor fractionis ejusmodi per methodum Dni Des-Cartes inveniri debeat, & tamen scrutinium istud elegans est, & minimè vulgare, lubet hîc modum, quo id institui possit, in gratiam Amatorum Geometriæ hujus exponere.

Proposita sit Fractio quæcunque, composita inter alias ex quantitatibus a & z, atque talis, ut positâ $z \infty a$, ambo ejus termini evanescant, quæritur quis tum sit fractionis valor? Ad hoc indagandum, converto primò terminos datæ fractionis in alios, eliminando lit. z, illamque ponendo majorem vel minorem quàm a quantitate aliquâ indeterminatâ x. Deinde pono numeratorem æqualem quantitati tx, ortamque hinc æquationem à surditate libero, adhibitis si quantitates valdè sint implicitæ iis subsidiis, quæ Dn. Huddenius pag. 429, seqq. explicuit: quo ritè peracto necessariò destruentur vel deficient unus pluresvè termini in fine æquationis, sicut illa per x, aut xx, aut x^3 &c. dividi possit. Hinc præter illos terminos qui per se deficient, etiam ultimum eorum qui remanserint pono nihilo æqualem, & ex hâc hypothesi valo-

rem quæro literæ t, quem in locum numeratoris propositæ fractionis substituo. Tandem etiam simili modo cum denominatore operor, eâque ratione novam fractionem propositæ æqualem obtineo. Et si hujus ambo termini adhuc sint æquales nihilo, repeto de novo operationem, ponendo singulos datæ fractionis terminos $\propto txx$; & si valor literæ t etiamnum evanescat pro utroque termino, pono illos $\propto tx^3$, hinc tx^4, tx^5, &c. donec prodeat fractio, cujus non uterque terminus evanescit, quod necessariò aliquando fiet. Quòd si verò post primam operationem pro utroque termino valor ipsius t prodiret infinitus, ordirer etiam novam operationem, sed ponerem successivè fractionis terminos $\propto t\sqrt{x}$, $t\sqrt{C.\,x}$, $t\sqrt{\sqrt{x}}$, &c. donec t pro alterutro vel utroque termino finitum valorem acquireret. In quibus operationibus illud cumprimis observandum est, quòd non opus sit totâ æquationum reductione uti, sed tantùm quatenùs ultimo termino inveniendo conducit, qui plerunque levi negotio ab attento Analystâ eruetur. Exemplis res clarior fiet:

Exempl. 1: Sit proposita Fractio $\dfrac{ab - b\sqrt{aa - zz}}{\sqrt{2aa - az} - \sqrt{C.\,2azz - z^3}}$, cujus ambo termini positâ $z \propto a$ evanescunt; quæritur ejus valor: Pro z pone $a + x$, erit fractio $\dfrac{ab - b\sqrt{aa - 2ax - xx}}{\sqrt{aa - ax} - \sqrt{C.\,a^3 - 3aax - 3axx - x^3}}$.

Fiat $tx \propto ab - b\sqrt{aa - 2ax - xx}$, sublatâ surditate habebis $bbxx + ttxx + 2abbx - 2abtx * \propto 0$, positoque ultimo termino $2abbx - 2abtx$ æquali 0, invenies $t \propto b$, qui novus est fractionis numerator. Fiat iterum $tx \propto \sqrt{aa - ax} - \sqrt{C.\,a^3 - 3aax - 3axx - x^3}$, sive (ponendo brevitatis ergò p loco $\sqrt{aa - ax}$, & q loco $\sqrt{C.\,a^3 - 3aax - 3axx - x^3}$) $tx \propto p - q$, vel $q \propto p - tx$. Cubetur æquatio, & prodibit $q^3 \propto p^3 - 3pptx + 3pttxx - t^3x^3$, omnibusque membris, quæ signum radicale exuerunt, ad unam partem translatis, fiet $q^3 + 3pptx + t^3x^3 \propto p$ in $pp + 3ttxx$, quæ si porrò quadretur, æquationem producet $\square\, q^3 + 3pptx + t^3x^3 \propto pp\, \square\, pp + 3ttxx$, quæ ab omni surditate libera est. At quoniam non integrâ hâc æquatione indigemus, sed tantùm quatenùs duobus ultimis terminis inveniendis inservit, poteris in substitutione omnes illos negligere, in quibus x plures dimensiones acqui-

acquirit; quocircà loco q^3 pone tantùm $a^3 - 3aax$, loco $3ppix$ tantùm $3aaix$, loco $\Box\overline{pp + 3iixx}$ solummodò $a^4 - 2a^3x$, &c. atque sic loco inventæ æquationis $\Box\overline{q^3 + 3ppix + i^3x^3} \propto pp\Box\overline{pp + 3iixx}$, non nisi $a^6 - 6a^5x + 6a^5ix$ &c. $\propto a^6 - 3a^5x$ &c. adeoque sublatâ a^6, quæ se spontè destruit, $-6a^5x + 6a^5ix$ &c. $\propto -3a^5x$ &c. sive $6a^5ix$ &c. $\propto 3a^5x$ &c.; unde posito $6a^5ix - 3a^5x \propto 0$, habebis $i \propto \frac{1}{2}$ pro novo Denominatore fractionis propositæ, cujus propterea valor erit $\frac{b}{\frac{1}{2}}$ seu $2b$.

Exempl. 2. Proponatur Fractio $\frac{a - z\sqrt{2aa - 3az + zz}}{a - \sqrt{2az - zz}}$, cujus termini in casu $z \propto a$ rursùs evanescunt, quæque posito $z \propto a - x$ in istam transmutatur $\frac{x\sqrt{ax + xx}}{a - \sqrt{aa - xx}}$. Pone $tx \propto x\sqrt{ax + xx}$, & sublatâ surditate $ax^3 + x^4 \propto ttxx$, fac ultimum terminum $ttxx$ æqualem nihilo, & habebis $t \propto 0$; vel breviùs ita: Quia $tx \propto x\sqrt{ax + xx}$, erit $t \propto \sqrt{ax + xx}$, hoc est, cùm x, propter $z \propto a - x$, fingatur nihilo æquari, erit quoque $t \propto 0$. Pone deinde $tx \propto a - \sqrt{aa - xx}$, fiet $ttxx + xx - 2atx \propto 0$, & quia $2atx$ evanescere debet, erit etiam $t \propto 0$; adeoque fractio proposita $\propto \frac{0}{0}$. Sed quia valor ejus nondum sic cognoscitur, pone denuò $txx \propto x\sqrt{ax + xx}$, habebisque $x^4 \frac{-ax^3}{tt - 1} \propto 0$, & quia $\frac{ax^3}{tt-1}$ debet evanescere, colliges ipsum t pro numeratore valoris esse infiniti. Simili modo operare cum denominatore, ponendo $txx \propto a - \sqrt{aa - xx}$, & invenies $t \propto \frac{1}{2}a$; adeò ut ipsa fractio absolutè infinita censenda sit, quæ contrà prorsùs evanesceret, si numerator finita, denominator infinita quantitas fuisset. Sed, quod hic peculiariter observandum venit, si post secundam hanc operationem ambo fractionis termini, qui post primam evanuerant, infiniti redderentur, sic ut nec ita fractionis valor cognosci posset, non assumendum esset in seq. operat. tx^3, tx^4 &c. neque etiam $t\sqrt{x}$, $t\sqrt{C.}\,x$, &c. sed $tx\sqrt{x}$, &c. Omitto alias observationes & cautelas, quas attenta harum rerum meditatio Lectori suggeret.

Pag. 439, & seqq. ad Regulam XI.

Cùm inventio tot tamque differentium Theorematum quæ hâc Regulâ continentur, non possit non, magnam admirationem excitare apud ignaros, quos artificium methodi latet, non ingratum iis speraq fore, si qualecunque arcanum retegam, & in unâ alterâvè parte regulæ modum ostendam, quo non tantùm ista, sed & pleraque alia ab ingeniosissimo Epistolæ hujus Auctore inveniri potuerunt. Methodus enim ubique eadem est, & in eo consistit, ut supponantur statim duæ æquationes ejusmodi quales quæruntur, ac deinde factâ ipsarum multiplicatione per se invicem comparentur separatim omnes termini productæ cum omnibus terminis propositæ æquationis, quò inde coëfficientes quæsitarum æquationum elici & determinari possint. Quæ quidem methodus non differt nisi in applicatione ab illâ, quâ ipse Dn[us] Des-Cartes in constructionibus Problematum solidorum & hypersolidorum inveniendis usus est, & quam aliàs etiam solennem sibi fuisse fatetur pag. 49. Imò hæc illa est, quâ quicquid in Geometriâ ardui & præclari uspiam habetur, reperiri debuit; cùm frustrà sanè hæc & talia à priori tentarentur.

Quod speciatim Regulam hanc undecimam concernit, observamus primò, quòd sese extendat tantùm ad illas æquationes, quæ ex multiplicatione duarum produci possunt, in quarum alterutrâ unus pluresvé termini deficiunt; cujus rei ratio est, quòd si quis similia condere vellet Theoremata pro illis, quæ ex duabus completis producuntur, is incideret in æquationes nihilo simpliciores iis, quas sibi resolvendas proposuit. Deinde animadvertimus, quòd nonnulli Divisores copulantur voculâ &, quando vid. formula æquationis propositæ uno tantùm modo in duas æquationes resolui, sed ejus Divisor ex plurium terminorum collatione determinari potest: alii disjunguntur voculâ *vel*, quoties illa etiam pluribus modis in duas resolubilis existit.

Ex gr. Sit proposita æquatio hujus formæ x^6, *, *, *, sxx, tx, $v \infty 0$, deturque illam dividi posse in duas alias, quarum una sit unius, altera 5 dimensionum. Ponantur hæ esse $x + y \infty 0$, & $x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e \infty 0$, è quarum ductu producitur

citur $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dxx + ex + ey \propto 0$, quæ termino-

$$\begin{array}{l} \qquad\quad +y \quad +ay \quad +by \quad +cy \quad +dy \end{array}$$

tenùs comparata cum propositâ $x^6, *, *, *, sxx, tx, v \propto 0$, sequentes exhibet æquationes, $a + y \propto 0$, $b + ay \propto 0$, $c + by \propto 0$, $d + cy \propto s$, $e + dy \propto t$, & $ey \propto v$; sive $a \propto -y$, $b \propto -ay \propto yy$, $c \propto -by \propto -y^3$, $d \propto s - cy \propto s + y^4$, $e \propto t - dy$, & $ey \propto v$. Et quoniam in æquatione $x^5 + ax^4$ &c. aliquis terminus nihilo æqualis requiritur, videndum quis ille sit: facilè autem apparet, nec a nec b nec c nihilo æquari posse, cùm secùs etiam evanesceret y contrà hyp. neque etiam e, qui ultimus terminus esse debet; sed solum d; quo casu fiet $y^4 \propto -s$, $e \propto t$, & $ey \propto v$. unde porrò fluit $y \propto \frac{v}{t} \propto 8\sqrt{\sqrt{-s}} \propto \frac{-st^3}{v^3} \propto$ &c. adeoque $x + y \propto x + \frac{v}{t} \propto x\ 8 \sqrt{\sqrt{-s}} \propto x - \frac{st^3}{v^3} \propto$ &c. qui sunt ipsissimi Divisores æquationis propositæ, qui in Auctore habentur pag. 442.

Rursùs proponatur Æquatio $x^5, px^4, *, *, sx, t \propto 0$, ponaturque dividi posse per æquationem completam duarum, & aliam trium dimensionum. Sunto hæ $xx + yx + z \propto 0$, & $x^3 + axx + bx + c \propto 0$, è quarum multiplicatione oritur æquatio

$$\begin{array}{l} x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + cyx + cz \propto 0 \\ \qquad\ \ +y \quad\ +ay \quad +by \quad +bz \\ \qquad\qquad\quad +z \quad\ +az \end{array}$$

conferenda cum propositâ

$x^5, px^4, *, *, sx, t \propto 0$. Quod quinque novas æquationes subministrat: $a + y \propto p$, $b + ay + z \propto 0$, $c + by + az \propto 0$, $cy + bz \propto s$, & $cz \propto t$. Sed quia in æq. $x^3 + axx$ &c. aliquis terminus deficere supponitur, videoque duos hîc deficere posse, pono primò $a \propto 0$, deletisque in novis his æquationibus iis membris, in quibus a habetur, reperio per primam earum $y \propto p$, nec non collatis 2, 3 & 5tâ æquationibus, $z \propto 8\sqrt{\frac{t}{p}}$; vel, coll. 2, 3 & 4tâ æq. $zz - ppz + s \propto 0$, vel, coll. 2, 4 & 5tâ æq. $z^3 + sz - pt \propto 0$; vel denique coll. 3, 4 & 5tâ æq. $z \propto \frac{ppt}{ps + t}$: adeò ut æquatio proposita semper dividi hoc casu possit per $xx + px + z$, existente vel $z \propto 8\sqrt{\frac{t}{p}}$, vel $zz - ppz + s \propto 0$, vel $z^3 + sz - pt \propto 0$, vel $z \propto \frac{ppt}{ps + t}$, quorum divisorum omnium tantùm primus in Auctore occurrit pag. 447.

Si deinde ponam $b \infty 0$, delendo ea membra, in quibus b habetur, invenio iterum collatis omnifariam æquationibus quaternis varios valores pro y & z. Sed Auctor illorum tantùm rationem habuit, qui fluunt ex comparatione tum 1, 2, 4 & 5^tæ^, tum 2, 3, 4 & 5^tæ^ æquationis; quippe quarum illa præbet $y \infty p + \frac{s}{a}$, & $z \infty \frac{ys}{a}$; hæc $y \infty 8 \frac{s\sqrt{s}}{s}$, & $z \infty 8 \sqrt{s}$.

Postquam ita singulos terminos intermedios in æquatione $x^5 + axx$ &c. nibilo æquales supposuimus, nunc ambo simul deficere supponendi essent, faciendo a & $b \infty 0$; sed statim apparet, non posse utramque evanescere, quin contrà hyp. evanescat quoque z. Adeò ut Æquatio 5 dimens. ejus formæ, cujus est proposita, non possit ex æquatione quadratâ completâ per cubicam nisi gemino modo produci, nempe sic, ut in cubicâ vel deficiat secundus terminus tantùm, vel tertius tantùm. Atque ad eundem quoque modum prolixiora illa Theoremata quartæ & quintæ partis Regulæ hujus Tyrones invenire seu examinare possunt, in quo scrutinio illud cumprimis observare debent, ut omnes variationes possibiles enumerent, quibus fieri potest, ut hi vel illi termini in alterâ duarum æquationum, è quarum ductu proposita produci fingitur, deficiant.

Pag. 469 *&* 470, *ad Regulam XVII.*

EXhibet hic porrò Auctor Epistolæ quædam Theoremata pro reducendis Æquationibus, quæ per alias nullo termino carentes dividi possunt. Horum primum & simplicissimum, quod æquationibus quadrato-quadratis inservit, sic eruitur: Positis duabus æquationibus quadratis, $xx + ax + b \infty 0$, & $xx + yx + b \infty 0$, comparetur productum ipsarum

$$\begin{array}{llllll} x^4 & + a x^3 & + bxx & + byx & + bb & \infty 0, \\ & + y & + ay & + ab & & \\ & & + b & & & \end{array}$$

quoad singulos terminos cum æquatione propositâ $x^4 + px^3 + qxx + rx + s \infty 0$. ut exinde prodeant quatuor novæ æquationes, $a + y \infty p$, $b + ay + b \infty q$, $by + ab \infty r$, & $bb \infty s$. Deinde neglectâ secundâ quâ non indigemus, cæteræ conferantur inter se, quo fiet ut eliminatis ipsarum ope literis a & b, inveniatur

niatur $y \infty \frac{r-hp}{\frac{s}{h}-b}$. Excepto tantùm, cùm s determinatur ad bb, & ſimul r ad bp; quo caſu ambo fractionis termini evaneſcunt, & in causâ ſunt, cur y ex his ſolis datis inveniri nequeat: quare tum relictâ tertiâ æquatione ſecunda in auxilium vocanda eſt, quâ cum cæteris debito modo collatâ reperitur $y \infty \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp+2b-q}$. E quibus manifeſta fiunt Theoremata, quæ hîc dedit Auctor; ſimulque cætera quoque difficiliora inveſtigandi modus pateſcit.

Pag. 480. *§.* Aſſumpto.

RAtionem hujus operationis ſatis percipiet attentus Lector ex iis, quæ ſuprà pag. 453 commentati ſumus; cùm perinde ſit, addere producta coëfficientium æquationis per numeros continuè proportionales ab unitate; atque ſurrogare hunc, qui unitatem ſequitur, in locum x, & tunc aggregatum ipſorum terminorum ſumere.

Part. II.

Pag. 15. *ad Exempl.* $\frac{2}{3}ab-\frac{1}{2}aa)\frac{13}{12}a^4b+\frac{4}{9}aab^3-a^5$.
& Pag. 16. *ad Ex.* $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}f-ffuu+f^3uu)\frac{3}{4}q-\frac{3}{4}fq+f^3uuq-fuuq-4f^4u^4q+4f^3u^4q$.

IN Diviſionis operatione id præprimis Tyrones monendi ſunt, ut aſſumpto membro aliquo Diviſoris (in quo quædam litera plurimas vel pauciſſimas dimenſiones habet) pro principali Diviſore, non primum quodlibet quod occurrit Dividendi membrum per ipſum dividant, ſed tale ſeligant, in quo eadem litera itidem maximum vel minimum dimenſionum numerum habet; quod ſimiliter in toto operationis decurſu, quotieſcunque de novo inveniendo quotiente agitur, attendendum venit. Ita ſi in primo Exemplo pro primario diviſore ſtatuamus $\frac{2}{3}ab$, ubi litera a minimum, aut b maximum numerum dimenſionum habet, dividi per ipſum debet $\frac{4}{9}aab^3$, non $\frac{13}{12}a^4b$, & ſi pro diviſore ſeligamus $-\frac{1}{2}aa$, dividenda quantitas $-a^5$ (ut factum ab Au-

ctore Introductionis) non alia. Quòd si verò in divisore pariter atque in dividendo plura habeantur membra, in quibus litera aliqua maximum vel minimum divisorum numerum habet, illâ literâ neglectâ habenda est ratio reliquarum. Ita quoniam in post. Exemplo dividendus continet duo membra $-4f^4 n^4 q$ & $+4f^3 n^4 q$, in quibus lit. n quatuor; & divisor duo, in quibus eadem duas dimensiones obtinet, nempe $-ffnn$ & $+f3nn$; siquidem lubeat per alterutrum horum, putà $+f3nn$ divisionem instituere, divido per ipsum $-4f^4 n^4 q$, non verò $+4f^3 n^4 q$; cùm reliqua litera f plures ibi quàm hic dimensiones habeat, uti quoque plures habet in $+f3nn$ quàm in $-ffnn$. Horum verò observatio ideò necessaria est: quia secùs si Tyrones faxint, atque eum semper in dividendo ordinem sequi velint, quo propositæ sunt quantitates, fieri inter operandum potest, ut subinde in orbem redeant, & vel nullum divisionis finem inveniant, vel eum demùm post superfluas circuitiones assequantur.

Pag. 35. *§.* Ratio autem.

POtest adhuc aliter cognosci, num propositæ quantitates surdæ Communicantes sint, necné; neque opus est partem illarum priùs ex signo radicali liberare, quod sæpè ob divisorum multitudinem non parùm molestum. Criterium tale: Ductâ quantitatum propositarum unâ in alteram, si sint affectæ latere quadrato; aut in quadratum alterius, si sint affectæ latere cubico; aut in cubum, si biquadratico; aut in biquadratum, si surdesolido &c. consideretur, an productum inde ortum sit perfectum quadratum, aut cubus, aut biquadratum, aut surdesolidum &c. nam si tale sit, quantitates datæ communicantes erunt; sin minùs, non erunt: & si communicantes sunt, erunt ad seinvicem, ut dicti producti radix quadrata, aut cubica &c. ad alteram quantitatum rationalium, cum cujus potestate multiplicatio facta fuit. Ex. gr. Quantitates $\sqrt{27}$ & $\sqrt{48}$ sunt communicantes, quia 1296 productum 27 per 48 est quadratum; cujus radix cùm sit 36, erit $\sqrt{27}$ ad $\sqrt{48}$, ut 27 ad 36, seu ut 3 ad 4. Ita $\sqrt{C.\,40}$ & $\sqrt{C.\,135}$ sunt communicantes, quoniam 216000 productum □ti ex 40 per 135 est cubus, cujus radix 60; unde $\sqrt{C.\,40}$ ad $\sqrt{C.\,135}$ est, ut 40 ad 60, seu 2 ad 3. Sed $\sqrt{Ss.\,20}$ & $\sqrt{Ss.\,140}$ non communican-

tes ſunt, quia 22400000 prod. Biquad. ex 20 per 140 non eſt perfectum furſolidum.

Simili indicio conſtat, num duæ quantitates ſurdæ potentiâ ſint commenſurabiles: Factâ enim multiplicatione quadrati unius per alteram, ubi ſunt affectæ latere cubico; aut per quadratum alterius, ubi latere biquadratico; aut per cubum, ubi furſolido &c. ſi productum inde ortum deprehendatur eſſe verus cubus, aut quadrato-quadratum, aut furſolidum &c. quantitates datæ ſaltem potentiâ commenſurabiles ſunt, earumque quadrata erunt, ut producti radix competens ad alteram quantitatum rationalium, cum cujus poteſtate variabili multiplicatio facta fuit. Ex. gr √C. 243 & √C. 576 ſunt potentiâ commenſurabilia, eorumque quadrata, ſicut 324 ad 576, ſive 9 ad 16; quoniam 324 eſt radix cubica numeri 34012224 producti ex multiplicatione □ti 243 per 576. Non ſecùs etiam, ſi cubus alterutrius è datis quantitatibus ducatur in alteram, vel in quadratum alterius, vel cubum, vel ſurde-ſolidum &c. prout affectæ ſunt vel latere biquadratico, vel ſurdeſolido, vel quadrato-cubico &c. atque ex hâc multiplicatione producatur perfectum biquadratum, vel ſurde-ſolidum, vel quadrato-cubus &c. erunt propoſitæ quantitates potentiâ Cubicâ commenſurabiles, ſeu ipſarum cubi erunt ut numerus ad numerum. Et ita conſequenter eandem ſemper obſervando progreſſionis legem pro ſuperioribus potentiis. Plerunque verò non eſt opus huc progredi. Quotieſcunque enim quantitates ſurdæ ſunt commenſurabiles ſecundùm aliquam potentiam, cujus exponens ad exponentem ſigni radicalis ſit primus, etiam ſecundùm longitudinem cæteraſque omnes potentias commenſurabuntur. Et ſi diviſor maximus exponentium ſigni radicalis & potentiæ, ſecundùm quam propoſitæ quantitates commenſurantur, eſt binarius, etiam ſecundâ potentiâ, omnibuſque illis quas binarius metitur, commenſurari poterunt. Et ſi diviſor exponentium maximus eſt ternarius, poterunt commenſurari ſecundùm tertiam potentiam omneſque illas quas ternarius metitur. Adeò ut ſi datæ quantitates ſurdæ nec longitudine, nec potentiâ ſecundâ, nec tertiâ &c. ſunt commenſurabiles, etiam commenſurari nequeant ſecundùm ullam aliam, cujus & ſigni radicalis exponentes tales ſunt, ut unitas, binarius aut ternarius &c. ipſorum maxima ſit communis menſura. Sed non attinet iſtis diutiùs immorari.

Pag. 41. De Extractione Radicis &c.

REgula hæc extrahendi Radicem quadratam ex Binomiis, fundatur in prop. 55 & seqq. lib. 10. Elem. Eucl. potuitque analyticè sic inveniri: Ponatur binomium $a + \sqrt{b}$, ejusque radix $x + \sqrt{y}$; erit igitur quadratum hujus $xx + y + 2x\sqrt{y} \infty a + \sqrt{b}$. Fiant duæ æquationes separatæ, $xx + y \infty a$, & $2x\sqrt{y} \infty \sqrt{b}$: per primam habetur $xx \infty a - y$, per alteram $xx \infty \frac{b}{4y}$; unde & $a - y \infty \frac{b}{4y}$, seu $yy \infty ay - \frac{1}{4}b$, & $y \infty \frac{a \pm \sqrt{aa - b}}{2}$; ac proinde xx $(a - y) \infty \frac{a \pm \sqrt{aa - b}}{2}$. Quare tandem fiet $x + \sqrt{y}$ radix quæsita binomii $\infty \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{aa - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{aa - b}}{2}}$; quod id ipsum est, quod hæc Regula præcipit.

F I N I S.